



## Numerische Mathematik I (SS 2006)

### 6. Übungsblatt — 26. Mai 2006

**Aufgabe 20:** (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei  $p(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$ .

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von  $p$  liegen.
- Verwenden Sie den Satz von Sturm, um zu zeigen, dass  $p$  je eine Nullstelle in den Intervallen  $[-1, -\frac{1}{2}]$ ,  $[-\frac{1}{2}, 0]$ ,  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2}, 1]$  besitzt.
- Führen Sie ausgehend vom Startwert  $x_0 = 1$  drei Schritte des Newton-Verfahrens zur Berechnung der größten Nullstelle durch.

**Aufgabe 21:** (schriftlich zu bearbeiten)

Es sei  $N_{i,0}(u) := \begin{cases} 1, & u \in [i, i+1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

und  $N_{i,r}(u) := \frac{u-i}{r}N_{i,r-1}(u) + \frac{i+r+1-u}{r}N_{i+1,r-1}(u)$  für  $i \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \mathbb{N}$ .

- Zeigen Sie, dass  $N_{i,r}$  für  $i \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \mathbb{N}$  bezüglich  $\Delta = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  ein Spline vom Grad  $r$  ist.
- Berechnen Sie  $N_{0,3}$ .

**Aufgabe 22:** (mündlich)

Berechnen Sie mit Hilfe des Bairstow-Verfahrens ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen  $\alpha_{1,2}$  des Polynoms

$$p(x) = x^4 + 2x^3 - \frac{47}{4}x^2 + \frac{55}{4}x - \frac{25}{2}.$$

Führen Sie ausgehend vom Startwert  $\alpha_{1,2}^{(0)} = \pm i$  zwei Bairstow-Schritte durch und bestimmen Sie  $|p(\alpha_{1,2}^{(k)})|$  für  $k = 0, 1, 2$ .

**Aufgabe 23:** (mündlich)

- (a) Ein kubischer Spline  $s$  heißt natürlich, falls seine zweite Ableitung am Rand verschwindet. Bestimmen Sie den natürlichen kubischen Spline  $\varphi$  bzgl. des Gitters  $\Delta = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  mit  $\varphi(-2) = \varphi(-1) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$  und  $\varphi(0) = 1$ .
- (b) Ein Spline  $s \in S_l([a, b])$  heißt periodisch, falls gilt  $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$  für  $k = 0, 1, \dots, l - 1$ . Bestimmen Sie den periodischen quadratischen Spline  $\varphi$  bzgl. des Gitters  $\Delta = \{0, 1, 2, 3\}$  mit  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  und  $\varphi(2) = -1$ .

**Abgabe** der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 2. Juni 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen (**Druckbuchstaben**) und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.