Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer
Dipl.-Math. J. Brunk

Numerische Mathematik I (SS 2006)

8. Übungsblatt — 9. Juni 2006

Aufgabe 26: (schriftlich zu bearbeiten)

Mit

$$N_e(T) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}^2} \text{ und } N_2(T) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2}$$

sind zwei Normen auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) $\|Tx\|_2 \leq N_2(T)\|x\|_2$ für alle $T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Für beliebige orthogonale Matrizen $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$N_e(Q_1 T Q_2) = N_e(T) \text{ und } N_2(Q_1 T Q_2) = N_2(T).$$

(c) Für $n = m$ gilt $lub_2(T) = N_2(T) = \sqrt{\rho(T^T T)}$.

Aufgabe 27: (schriftlich zu bearbeiten)

Gegeben sei die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ für das A_α das Zeilen-, Spalten- oder Quadratsummenkriterium erfüllt?

(b) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die das Einzelschrittverfahren angewandt auf das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ für beliebige rechte Seiten $b \in \mathbb{R}^3$ und beliebige Startvektoren $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.

(c) Geben Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die das Gesamtschrittverfahren angewandt auf das lineare Gleichungssystem $A_\alpha x = b$ für beliebige rechte Seiten $b \in \mathbb{R}^3$ und beliebige Startvektoren $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.

Aufgabe 28: (mündlich)

Gegeben sei eine symmetrische Tridiagonalmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_n \\ & & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \beta_j \neq 0,\ j = 2, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

(a) Das charakteristische Polynom $q_n(\lambda) := \det(T - \lambda I)$ von T lässt sich rekursiv berechnen durch

$$\begin{aligned} q_0(\lambda) &:= 1 \\ q_1(\lambda) &:= \alpha_1 - \lambda \\ q_j(\lambda) &:= (\alpha_j - \lambda)q_{j-1}(\lambda) - \beta_j^2 q_{j-2}(\lambda),\ j = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

(b) Die daraus konstruierten Polynome $(-1)^n q_n, (-1)^{n-1} q_{n-1}, \ldots, q_0$ bilden auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $q_n(a)q_n(b) \neq 0$ eine Sturmsche Kette.

Aufgabe 29: (mündlich)

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -4 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 37 \end{pmatrix} \quad (\text{Lösung: } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

soll mit dem Gesamtschrittverfahren gelöst werden.

(a) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$ drei Iterationsschritte durch.

(b) Geben Sie eine a-posteriori Fehlerabschätzung für $\|x^{(3)} - x\|_\infty$ an und vergleichen sie mit dem wahren Fehler.

(c) Bestimmen Sie zu einem vorgegebenen $\varepsilon = 10^{-3}$ die Anzahl k der Iterationsschritte, sodass $\|x^{(k)} - x\|_\infty < \varepsilon$ garantiert werden kann.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Freitag, 16. Juni 2006, 10:00 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerik I/II“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes (20.30), gegenüber von Zi. 112.

Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihren Namen **(Druckbuchstaben)** und Ihre Matrikelnummer und heften Sie die Blätter zusammen.