



## Numerische Mathematik II Übungsblatt 1

(Wintersemester 2007/2008)

25. Oktober 2007

### Aufgabe 1

( 2 Punkte )

Sei  $f = (f_0, \dots, f_{n-1})^t \in \mathbb{C}^n$ . Zeigen Sie:

$$\mathcal{D}_n f = \frac{1}{n} V_n (f_0, f_{n-1}, \dots, f_1)^t .$$

### Aufgabe 2

( 4 Punkte )

Sei

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt}$$

dasjenige trigonometrische Polynom vom Grad  $n$ , das  $(t_j, f_j)$  mit  $t_j = \frac{2\pi}{n} j$ ,  $f_j \in \mathbb{C}$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$  interpoliert, d.h.  $p(t_j) = f_j$ .

Zeigen Sie für  $0 \leq m \leq n$ :

$$\sum_{j=0}^{n-1} |f_j - p_m(t_j)|^2 = \min \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |f_j - q(t_j)|^2 : q \text{ ist trigo. Polynom vom Grad } \leq m \right\} .$$

Hierbei ist  $p_m$  das  $m$ -te Abschnittspolynom von  $p$ , d.h.

$$p_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k e^{ikt} .$$

Hinweis: Zeigen Sie:  $\sum_{j=0}^{n-1} |f_j - q(t_j)|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |f_j - p_m(t_j)|^2 + \sum_{j=0}^{n-1} |p_m(t_j) - q(t_j)|^2$ .

### Aufgabe 3

( 3 Punkte )

Seien  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$  diagonalisierbar. Und bezeichnen wir mit  $\alpha_i$  bzw.  $\beta_i$  für  $i = 1, \dots, n$  die Eigenwerte von  $A$  bzw.  $B$ .

Zeigen Sie:

Das Tensorprodukt  $A \otimes B$ , welches durch

$$(A \otimes B)_{k,l} = a_{\lfloor k/n \rfloor, \lfloor l/n \rfloor} b_{k \bmod n, l \bmod n}$$

definiert ist, hat die Eigenwerte  $\alpha_i \beta_j$  mit  $i, j = 1, \dots, n$ .

### Aufgabe 4

( 4 Punkte )

Seien  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . Betrachten Sie die zyklische Faltung  $(x *_c y)_k = \sum_{r=0}^{n-1} x_{(k-r) \bmod n} y_r$  und das punktweise Produkt  $(x \odot y)_k = x_k y_k$  zweier Vektoren.

Zeigen Sie:

a)  $\mathcal{D}_n(x *_c y) = n \mathcal{D}_n x \odot \mathcal{D}_n y$ ,

b)  $\mathcal{D}_n(x \odot y) = \mathcal{D}_n x *_c \mathcal{D}_n y$ .

### Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder (Zimmer 007):	donnerstags	11:30 - 12:30 Uhr
Dipl. - Math. Wolfgang Müller (Zimmer 126):	dienstags	10:00 - 12:00 Uhr

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 8. November 2007, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitze „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

**Besprechung** der Aufgaben: **Donnerstag, 8. November 2007, 14:00-15:30 Uhr** in Neuer-Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

[http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik\\_2\\_2007w](http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w)

abgelegt.