Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
**Institut für Angewandte und Numerische Mathematik**
**Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. Wolfgang Müller**

# Numerische Mathematik II
# Übungsblatt 2

(Wintersemester 2007/2008) 8. November 2007

**Aufgabe 5** ( 4 Punkte )

Zu den Stützpunkten $0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_{2m} < 2\pi$ und reellen Daten $f_0, f_1, \ldots, f_{2m}$ existiert ein eindeutiges trigonometrisches Interpolationspolynom

$$P_m(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{m} (A_j \cos jt + B_j \sin jt)$$

mit $P_m(t_j) = f_j$ für $j = 0, 1, \ldots, 2m$.
Zeigen Sie, dass

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^{2m} f_k\, q_k(t) \text{ mit } q_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2m} \frac{\sin \frac{t-t_j}{2}}{\sin \frac{t_k - t_j}{2}}$$

wohldefiniert ist und die Interpolationsaufgabe löst.

**Aufgabe 6** ( 3 Punkte )

Sei $n = pM$. Zeigen Sie die Basis-$p$-Zerlegung der Fourier-Matrix $\tilde{\mathcal{D}}_n$:

$$\tilde{\mathcal{D}}_n \Pi_{p,n} = \left(\tilde{\mathcal{D}}_p \otimes I_M\right) \operatorname{diag}\left(I_M, \Omega_{p,M}, \ldots, \Omega_{p,M}^{p-1}\right)\left(I_p \otimes \tilde{\mathcal{D}}_M\right) \qquad (*)$$

mit $\Omega_{p,M} = \operatorname{diag}\left(1, \omega_n^{-1}, \ldots, \omega_n^{-(M-1)}\right)$ und $\omega_n = e^{i2\pi/n}$.
Die Permutation $\Pi_{p,n}$ ist definiert durch ihre Wirkung auf Zeilenvektoren

$$w^t = v^t \Pi_{p,n} :\Longleftrightarrow w^t = \Big(v(0:p:n-1), v(1:p:n-1), \ldots, v(p-1:p:n-1)\Big) .$$

Dabei bezeichnet $v(j:p:n-1) \in \mathbb{C}^M$ den Teilvektor von $v$ mit den Einträgen $\left(v_j, v_{j+p}, v_{j+2p}, \ldots, v_{j+(M-1)p}\right)^t$. Für $v \in \mathbb{C}^{15}$ haben wir zum Beispiel

$$v^t \Pi_{3,15} = \Big(v_0, v_3, v_6, v_9, v_{12}, v_1, v_4, v_7, v_{10}, v_{13}, v_2, v_5, v_8, v_{11}, v_{14}\Big) .$$

Hinweis: Die rechte Seite von $(*)$ ist eine $p \times p$-Blockmatrix mit $M \times M$ Blöcken. Unterteilen Sie $\tilde{\mathcal{D}}_n \Pi_{p,n}$ entsprechend und weisen Sie die Übereinstimmung blockweise nach.

**Aufgabe 7** ( 3 Punkte )

Sei $z \in \mathbb{C}^n$. Wir definieren die zirkulante Matrix $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $Zx = z *_c x$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie die Matrix $Z$ ist diagonalisierbar und es gilt: $\mathcal{D}_n^H Z = D\mathcal{D}_n^H$. Wobei die Diagonalmatrix $D$ die Eigenwerte von $Z$ enthält.

**Aufgabe 8** ( 4 Punkte )

a) Bestimmen Sie $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass für alle kubischen Polynome $p$ gilt:

$$\int_0^1 p(t)\,dt = \lambda_0\, p(0) + \lambda_1\, p(1) + \lambda_2\, p'(0) + \lambda_3\, p'(1) .$$

b) Bestimmen Sie $t_0, t_1, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, sodass für alle kubischen Polynome $p$ gilt:

$$\int_{-1}^1 p(t)\,dt = \lambda_0\, p(t_0) + \lambda_1\, p(t_1) .$$

c) Begründen Sie, dass es keine weiteren Lösungen in Teil a) gibt. Und zeigen Sie, dass genau zwei Lösung für Teil b) existieren.

---

**Sprechstunden:**

| | | |
|---|---|---|
| Prof. Dr. Andreas Rieder (Zimmer 007): | donnerstags | 11:30 - 12:30 Uhr |
| Dipl. - Math. Wolfgang Müller (Zimmer 126): | dienstags | 10:00 - 12:00 Uhr |

---

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 15. November 2007, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

**Besprechung** der Aufgaben: **Donnerstag, 15. November 2007**, 14:00-15:30 Uhr in Neuer–Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w`

abgelegt.