



Numerische Mathematik II Übungsblatt 3

(Wintersemester 2007/2008)

15. November 2007

Aufgabe 9 (3 Punkte + 1 Bonuspunkt)

Zeigen Sie: Die Newton-Cotes-Formeln sind für gerade n exakt vom Grad $n + 1$.

Versuchen Sie ohne die Darstellung des Interpolationsfehlers auszukommen.

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Sei $g \in C[a, b]$. Zeigen Sie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b g(t) \omega_4^\varepsilon(t) dt = \int_a^b g(t) \omega_4^0(t) dt$$

mit $\omega_4^\varepsilon(t) = (t-a)(t-\frac{b+a}{2})(t-\frac{b+a}{2}-\varepsilon)(t-b)$ und $\omega_4^0(t) = (t-a)(t-\frac{b+a}{2})^2(t-b)$.

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Bestimmen Sie für $n = 0, 1, 2, 3$ geeignete Knoten $t_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, n$, und ein Gewicht $\lambda^{(n)}$ derart, dass die Quadraturformel

$$\hat{I}_n(f) = \lambda^{(n)} \sum_{i=0}^n f(t_i^{(n)})$$

für Polynome vom Grad $n + 1$ im Intervall -1 bis 1 exakt ist.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Eine Folge $\{\hat{I}_n\}$ von Quadraturformeln heißt konvergent, wenn für alle $f \in C[a, b]$ gilt:

$$\hat{I}_n(f) \longrightarrow I(f) = \int_a^b f(t) dt, \text{ für } n \longrightarrow \infty.$$

Zeigen Sie: Eine für alle Polynome P konvergente Quadraturformel \hat{I}_n , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n(P) = I(P), \quad (*)$$

mit gleichmäßig beschränkten Gewichten, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$\sum_{i=0}^n |\lambda_i^{(n)}| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad (**)$$

ist konvergent.

Hinweis: Verwenden Sie den Weierstraßschen Approximationssatz (Walter, Analysis 2).

Aufgabe 13

(3 Punkte)

Gegeben ist für $m \in \mathbb{N}$ die Rekursionsvorschrift

$$T_{i,0} = 2^{-i} h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{\ell=1}^{2^i-1} f(a + \ell 2^{-i} h) \right), \quad 0 \leq i \leq m$$

$$T_{i,k} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}, \quad 1 \leq k \leq i \leq m,$$

wobei $h = b - a$. Berechnen Sie $T_{1,1}$ und $T_{2,2}$.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder (Zimmer 007):	donnerstags	11:30 - 12:30 Uhr
Dipl. - Math. Wolfgang Müller (Zimmer 126):	dienstags	10:00 - 12:00 Uhr

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 22. November 2007, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitze „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 22. November 2007, 14:00-15:30 Uhr** in Neuer-Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w

abgelegt.