Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

Numerische Mathematik II
Übungsblatt 4

(Wintersemester 2007/2008) 22. November 2007

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Gegeben sei das Integral $I(f) := \int_0^2 xe^{-x}\,dx$. Bestimmen Sie mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregel $T(f,h)$ Näherungswerte von I für $h = 1$ und $h = \frac{1}{2}$. Geben Sie die exakten relativen Fehler beider Näherungen an und vergleichen Sie diese mit der Restgliedabschätzung (vgl. Vorlesung).

Berechnen Sie durch Extrapolation der Werte eine verbesserte Näherung und deren relativen Fehler. Welche Schrittweite h muss man verwenden um einen vergleichbaren Fehler mit der zusammengesetzten Trapezregel zu bekommen? Vergleichen Sie die jeweils benötigte Anzahl von Auswertungen von f.

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Wir betrachten nochmals die Rekursion aus Aufgabe 13:

$$T_{i,k} = \frac{4^k T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{4^k - 1}, \quad 1 \le k \le i \le m .$$

Zeigen Sie, dass die Gewichte der Quadratur–Formeln $T_{i,k}$ positiv sind. Beweisen Sie dazu durch Induktion über k, dass für die Folge

$$\begin{aligned} Q_{i,0} &:= 4T_{i+1,0} - 2T_{i,0}\,, \qquad i = 0,1,\dots,m-1\,, \\ Q_{i,k} &:= \frac{1}{4^k-1}\Big(2^{2k+1}T_{i,k-1} + 2T_{i-1,k-1} + 4^{k+1}Q_{i,k-1}\Big) \qquad 1 \le k \le i \le m-1\,. \end{aligned}$$

die Identität $T_{i,k} = \frac{1}{4^k-1}\big(T_{i-1,k-1} + Q_{i-1,k-1}\big)$, $1 \le k \le i \le m$ gilt. Folgern Sie daraus, dass die Gewichte von $T_{i,k}$ positiv und die von $Q_{i,k}$ nichtnegativ sind.

Aufgabe 16 (3 Punkte)

Zeigen Sie:

Für die Lagrange-Polynome $L_0, \dots, L_n$ zu den Stützstellen $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} L_j(0)\, t_j^m = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0\,, \\ 0 & \text{für } 1 \le m \le n\,, \\ (-1)^n\, t_0\, t_1 \cdots t_n & \text{für } m = n+1\,. \end{cases}$$

Aufgabe 17 (3 Punkte)

Für $n = 0, 1, 2, \dots$ sind die Hermite–Polynome durch

$$H_n(t) = (-1)^n \exp(t^2)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n \exp(-t^2), \qquad t \in \mathbb{R}$$

eindeutig charakterisiert. Zeigen Sie:

a) Die Hermite–Polynome genügen der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(t) = 2tH_n(t) - 2nH_{n-1}(t)$$

mit $H_0(t) = 1$ und $H_1(t) = 2t$. Geben Sie zusätzlich noch H_2 und H_3 an.

b) Für die Ableitung von H_n gilt $H_n'(t) = 2nH_{n-1}(t)$.

c) Die Hermite–Polynome sind orthogonal bzgl. des gewichteten Skalarprodukts

$$(u,v)_w := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(t)\, w(t)\, dt \text{ mit } w(t) = \exp(-t^2)\,.$$

<u>Hinweis:</u> Verwenden Sie die Produktregel von Leibniz.

Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder (Zimmer 007):	donnerstags	11:30 - 12:30 Uhr
Dipl. - Math. Wolfgang Müller (Zimmer 126):	dienstags	10:00 - 12:00 Uhr

---

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 29. November 2007, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 29. November 2007**, 14:00-15:30 Uhr in Neuer–Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w`

abgelegt.