



## Numerische Mathematik II Übungsblatt 5

(Wintersemester 2007/2008)

29. November 2007

### Aufgabe 18 ( 4 Punkte )

Zeigen Sie: Bei der Gauß-Quadratur besteht zwischen den Gewichten  $\lambda_{n,i}$ , den Stützstellen  $\tau_{n,i}$  und den Orthogonalpolynomen  $p_k$  bzgl.  $w$  der folgende Zusammenhang:

$$\lambda_{n,j} = \frac{\|p_n\|_\omega^2}{p'_{n+1}(\tau_{n,j})p_n(\tau_{n,j})}.$$

Hinweis: Testen Sie die Quadraturformel für  $f(x) = \frac{p_{n+1}(x)}{(x-\tau_{n,j})}p_n(x)$ .

### Aufgabe 19 ( 3 Punkte + 1 Bonuspunkt )

Gegeben sei die Gewichtsfunktion mit Integrationsgrenzen

- $w(x) = \sqrt{|x|}$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,
- $w(x) = \cos x$ ,  $a = -\pi/2$ ,  $b = \pi/2$ ,
- $w(x) = 1 + x^2$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

Berechnen Sie die Gewichte und Stützstellen für die 2-punktige Gauß-Quadratur bzgl.

$$(p, q)_\omega := \int_a^b p(t) q(t) w(t) dt.$$

Versuchen Sie die Aufgabe möglichst elegant zu lösen.

### Aufgabe 20 ( 4 Punkte )

Zeigen Sie, dass die Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \lambda_{n,0}f(-1) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{n,i}f(\tau_{n,i}) + \lambda_{n,n}f(1)$$

mit geeigneten Stützstellen und Gewichten für Polynome vom Grad  $2n - 1$  exakt ist (Lobatto-Quadratur).

Hinweis: Wählen Sie die freien Stützstellen als Nullstellen eines geeigneten Orthogonalpolynoms bzgl.  $\omega(x) = (1-x)(1+x)$ .

### Aufgabe 21 ( 4 Bonuspunkte )

Sei  $\{p_k\}_{k \geq 0}$  die Familie der Orthogonalpolynome bzgl.  $\omega$ . Wir definieren eine Familie  $\{q_k\}_{k \geq 0}$  von orthonormalen Polynomen bzgl.  $\omega$  durch

$$q_k := \frac{p_k}{\|p_k\|_\omega} \quad k = 0, 1, \dots, \\ q_{-1} \equiv 0.$$

Zeigen Sie:

Für  $x \neq y$  gilt die Formel von Christoffel-Darboux:

$$\sum_{k=0}^n q_k(x)q_k(y) = \frac{\|p_{n+1}\|_\omega}{\|p_n\|_\omega} \frac{q_n(y)q_{n+1}(x) - q_n(x)q_{n+1}(y)}{x - y}.$$

### Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder (Zimmer 007):	donnerstags	11:30 - 12:30 Uhr
Dipl. - Math. Wolfgang Müller (Zimmer 126):	dienstags	10:00 - 12:00 Uhr

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 6. Dezember 2007, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitzen „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

**Besprechung** der Aufgaben: **Donnerstag, 6. Dezember 2007, 14:00-15:30 Uhr** in Neuer-Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

[http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik\\_2\\_2007w](http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w)

abgelegt.