Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

Numerische Mathematik II
Übungsblatt 6

(Wintersemester 2007/2008) 6. Dezember 2007

Aufgabe 22 (4 Punkte)

In einer Population der festen Größe N breche zur Zeit $t_0 = 0$ eine Grippe aus. Um ihre Ausbreitung zu studieren, werden folgende Annahmen gemacht:

1. Jedes Mitglied der Population kann angesteckt werden.
2. Die Krankheit ist so langwierig, daß in dem betrachteten Zeitraum zwar keine Heilung erfolgt, sie aber nicht tödlich ist.
3. Jedes angesteckte Mitglied ist ansteckend, darf sich aber dennoch frei in der Population bewegen.
4. Pro Zeiteinheit hat jeder Angesteckte k Kontakte mit anderen Mitgliedern der Population, und jeder Kontakt mit einem noch Gesunden führt zu dessen Erkrankung.

a) Formulieren Sie die zu diesem Problem gehörende Anfangswertaufgabe und bestimmen Sie deren Lösung.

b) In einer Stadt mit 100 000 Einwohnern breche eine Grippe aus. Sie beginne mit 100 Erkrankungen, und in der ersten Woche mögen 150 neue Fälle hinzukommen. Wie viele Einwohner werden nach 5 Wochen erkrankt sein ?

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Sei $y' = Ay$ ein lineares Differentialgleichungssystem mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen von Satz 3.4 der Vorlesung erfüllt sind.

b) Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür an, dass bei jedem Anfangswert $y_0 \in \mathbb{R}^n$ für die Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = Ay(t)$, $y(0) = y_0$

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t)\|_\infty = 0$$

gilt.

Aufgabe 24 (4 Punkte)

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + xy^2, \quad y(0) = 0 \ .$$

Zeigen Sie, daß die durch die Iteration

$$y_{n+1}(x) \quad = \quad \int_0^x \left(t^2 + t\cdot(y_n(t))^2\right) dt \ , \qquad y_0 \equiv 0$$

bestimmte Folge $\{y_n\}_{n\geq 0}$ auf $[0, 1/2]$ gleichmäßig gegen die auf $[0, 1/2]$ existierende Lösung des obigen Anfangswertproblems konvergiert.

b) Lösen Sie durch Fixpunktiteration das Anfangswertproblem

$$y' = xy, \quad y(0) = 1 \ .$$

Hinweis: Starten Sie mit $y_0 \equiv 1$ und zeigen Sie

$$y_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^{2j}}{2^j j!} \ .$$

Sprechstunden:

Prof. Dr. Andreas Rieder (Zimmer 007):	donnerstags	11:30 - 12:30 Uhr
Dipl. - Math. Wolfgang Müller (Zimmer 126):	dienstags	10:00 - 12:00 Uhr

---

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 13. Dezember 2007, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Mathematik I/II/III" neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 13. Dezember 2007**, 14:00-15:30 Uhr in Neuer–Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w`

abgelegt.