Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

Numerische Mathematik II
Übungsblatt 7

(Wintersemester 2007/2008) 13. Dezember 2007

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Es seien f und g reellwertig stetig im Rechteck $R := [a,b] \times [-c,c]$ mit $|f(x,y)| \le K,\ |f(x,y) - g(x,y)| \le \varepsilon$ für $(x,y) \in R$ und f erfülle eine Lipschitz-Bedingung bzgl. y mit der Konstanten $L > 0$. Mit $\hat{y}$ bzw. $\tilde{y}$ wird die Lösung des AWP

$$y' = f(x,y)\ , \quad y(\hat{x}_0) = \hat{y}_0 \text{ bzw. } y(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0\ , \quad a \le \hat{x}_0 \le \tilde{x}_0 \le b\ ,$$

und mit $\bar{y}$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = g(x,y), \quad y(\hat{x}_0) = \hat{y}_0$$

bezeichnet. Beweisen Sie für $x \in [\hat{x}_0, b]$ folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x) - \hat{y}(x)| &\le \big(|\tilde{y}_0 - \hat{y}_0| + K(\tilde{x}_0 - \hat{x}_0)\big)e^{L(x-\hat{x}_0)}\ , \\ |\bar{y}(x) - \hat{y}(x)| &\le \varepsilon(x - \hat{x}_0)\, e^{L(x-\hat{x}_0)}\ . \end{aligned}$$

Hinweis: Sie können das Lemma von Gronwall verwenden (z.B. Quarteroni/Sacco/Saleri Numerische Mathematik 2).

Aufgabe 26 (3 Punkte)

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix}, \qquad y_1(0) = 0, \qquad y_2(0) = 1\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Näherungen für die erste Komponente η_1^k aus dem expliziten bzw. impliziten Euler–Verfahren einer Drei–Term–Rekursionsformel genügen.

b) Geben Sie eine explizite Formel für die Näherungswerte η_1^k zu beiden Euler–Verfahren an, indem Sie die Differenzengleichungen aus Teil a) mit einem geeigneten Ansatz lösen.

c) Die kontinuierlich Lösung der Anfangswertaufgabe bleibt für große T über $[0,T]$ beschränkt. Untersuchen Sie, ob dies für die beiden diskreten Approximationen gilt.

Hinweis: Wählen Sie in Teil b) für die rekurrente Zahlenfolge

$$\alpha\eta^{k+1} + \beta\eta^k + \gamma\eta^{k-1} = 0$$

den Lösungsansatz $\eta^k = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k$, wobei $\alpha z_i^2 + \beta z_i + \gamma = 0$ für $i = 1,2$.

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $f \in C([a,b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Gegeben sei ein Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \qquad \text{(AWP 1)}$$

Zeigen Sie:

a) Die Koordinatentransformation $z := Qy$, mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, führt (AWP 1) über in

$$z' = Qf(x, Q^{-1}z), \quad z(x_0) = z_0\ . \qquad \text{(AWP 2)}$$

mit geeignetem z_0.

b) Das Verfahren von Heun vererbt dieses Transformationsverhalten ins Diskrete.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 20. Dezember 2007, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Mathematik I/II/III" neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 20. Dezember 2007**, 14:00-15:30 Uhr in Neuer–Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w`

abgelegt.