



Numerische Mathematik II Übungsblatt 8

(Wintersemester 2007/2008)

20. Dezember 2007

Aufgabe 28

(3 Punkte)

Formulieren Sie die Verfahrensfunktion Φ der Mittelpunkregel

$$\eta_{i+1} = \eta_i + hf \left(\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \frac{1}{2}(\eta_i + \eta_{i+1}) \right)$$

und zeigen Sie, dass das Verfahren die Konsistenzordnung 2 hat.

Aufgabe 29

(3 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -2ax, \quad y(0) = y_0.$$

Bestimmen Sie den globalen Diskretisierungsfehler für das implizite Euler-Verfahren.

Aufgabe 30

(3 Bonuspunkte)

Bestimmen Sie alle expliziten Runge-Kutta-Verfahren der Gestalt

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & a_{21} & & \\ 2/3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \end{array},$$

die die Ordnung 3 haben.

Welche der gefundenen Verfahren sind invariant gegen Autonomisierung ?

Aufgabe 31

(3 Punkte)

Zeigen Sie, dass das durch $\Phi(x, y, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$ mit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x, y), \\ k_2 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x + h, y + h(2k_2 - k_1)\right) \end{aligned}$$

gegebene Verfahren („einfache Kutta-Regel“) von 3. Ordnung und invariant gegen Autonomisierung ist.

Aufgabe 32

(2 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konstant. Wir betrachten die lineare Anfangswertaufgabe

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $h > 0$ feste Schrittweite. Zeigen Sie für das klassische Runge-Kutta-Verfahren gilt:

$$\eta_k = \left(I + hA + \frac{h^2}{2}A^2 + \frac{h^3}{6}A^3 + \frac{h^4}{24}A^4 \right)^k y_0.$$

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 10. Januar 2008, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitze „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 10. Januar 2008**, 14:00-15:30 Uhr in Neuer-Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w

abgelegt.