



Numerische Mathematik II Übungsblatt 9

(Wintersemester 2007/2008)

10. Januar 2008

Aufgabe 33

(3 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \quad x \in [a, b], \\ y(a) &= y_0. \end{aligned}$$

Das explizite Euler-Verfahren

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf(x_k, \eta_k), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad \eta_0 = y_0$$

mit $x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N$, $h = (b - a)/N$, $N \in \mathbb{N}$, soll durch Extrapolation verbessert werden.

Berechnen Sie dazu aus η_k ($k = 0, \dots, N-1$) jeweils $\eta_{k+1}^{(1)}$ durch einen Euler-Schritt zur Schrittweite h und $\eta_{k+1}^{(2)}$ durch zwei Euler-Schritte zur Schrittweite $\frac{h}{2}$.

Die verbesserte Näherung η_{k+1} ergibt sich dann durch Extrapolation von $(h, \eta_{k+1}^{(1)})$ und $(\frac{h}{2}, \eta_{k+1}^{(2)})$ auf $h = 0$.

- Welches bekannte Verfahren ergibt sich auf diese Weise ?
- Wie verhalten sich Aufwand und Konvergenz des erhaltenen Verfahrens im Vergleich zum expliziten Euler-Verfahren ?

Aufgabe 34

(3 Punkte)

Leiten Sie die Bestimmungsgleichung für den Fehlerkoeffizient $e_1(x)$ in der asymptotischen Entwicklung (3.19) für den Fall $\omega = 1$ her.

Aufgabe 35

(3 Punkte)

Betrachten Sie das Verfahren 2. Ordnung

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

angewandt auf die Anfangswertaufgabe $y' = y$, $y(0) = 1$.

Zeigen Sie:

$$e_0(x) = -\frac{1}{6}xe^x, \quad e_1(x) = -\frac{1}{24}xe^x, \quad d_0(x) = \frac{1}{6}e^x, \quad d_1(x) = \frac{1}{24}e^x,$$

wobei e_0, e_1 bzw. d_0, d_1 die Koeffizienten der Entwicklung (3.19) bzw. (3.21) bezeichnen.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 17. Januar 2008, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitzen „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 17. Januar 2008, 14:00-15:30 Uhr** in Neuer-Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w

abgelegt.