Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

Numerische Mathematik II
Übungsblatt 11

(Wintersemester 2007/2008) 24. Januar 2008

Aufgabe 39 (3 Punkte)

Gegeben sei das zweistufige Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} ,$$

das die Konsistenzordnung 2 besitzt. Mit welchen dreistufigen Runge-Kutta-Verfahren ist die gegebene Methode zu einem eingebetteten Runge-Kutta-Verfahren zu kombinieren?

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \lambda\,(y - g(x)) + g'(x) \ , \quad y(0) = y_0 \ ,$$

wobei für $g \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$ die Gleichung

$$h\,g'(x+h) = g(x+h) - g(x) + O(h^2) \quad \text{für} \quad h \to 0$$

gilt. Der Parameter λ sei negativ, jedoch betragsmäßig sehr groß, und $y_0 \neq g(0)$.

a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems. Und zeigen Sie, es gilt:

$$y(x+h) = e^{\lambda h}\,(y(x) - g(x)) + g(x+h) \ .$$

b) Das Anfangswertproblem soll mit dem expliziten Euler-Verfahren gelöst werden. Leiten Sie eine allgemeine Darstellung der Iterierten η_{k+1} her. Für welche Schrittweiten h entspricht das qualitative Verhalten der Näherungslösung η_k dem der exakten Lösung des Anfangswertproblems?

c) Lösen Sie b) mit dem impliziten Euler-Verfahren statt dem expliziten.

Aufgabe 41 (5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -300 & 0 \\ 0 & -598 & -1 \end{pmatrix} y \ , \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems. Welche Anteile der Lösung sind für $x \gg 0$ vernachlässigbar ?

b) Das Anfangswertproblem soll mit Hilfe der impliziten Trapezregel

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{h}{2}\,\left(f(x_k,\eta_k) + f(x_{k+1},\eta_{k+1})\right)$$

gelöst werden. Leiten sie eine allgemeine Darstellung der Iterierten η_k her. Für welche Schrittweiten h entspricht das qualitative Verhalten der Näherungslösung η_k dem der exakten Lösung des Anfangswertproblems ?

c) Lösen Sie b) mit der Mittelpunktsregel

$$\eta_{k+1} = \eta_{k-1} + 2h\,f(x_k,\eta_k)$$

anstelle der impliziten Trapezregel.

Hinweise zu b):

1. Verwenden Sie für η_k den folgenden Ansatz:

$$\eta_k = c_1\mu_1^k\,v_1 + c_2\mu_2^k\,v_2 + c_3\mu_3^k\,v_3 \ ,$$

wobei die $v_i,\ 1 \le i \le 3$, die Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix des Anfangswertproblems bezeichnen.

2. Es ist $e^x \approx \frac{1+x/2}{1-x/2}$ für $|x| \ll 1$.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 31. Januar 2008, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Mathematik I/II/III“ neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 31. Januar 2008**, 14:00-15:30 Uhr in Neuer–Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w`

abgelegt.