Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

Numerische Mathematik II
Übungsblatt 12

(Wintersemester 2007/2008) 31. Januar 2008

Aufgabe 42 (2 Punkte)

Bestimmen Sie das Stabilitätsgebiet des Einschrittverfahren

$$\eta_{k+1} = \eta_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, \eta_k + \frac{h}{2} f(x_k, \eta_k))$$

indem Sie das Verfahren auf das Anfangswertproblem $y' = \lambda y\,,\ y(0) = 1$ anwenden. Ist das ESV A-stabil?

Aufgabe 43 (7 Punkte)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y' = A(x)\, y, \quad y(0) = y_0 \ ,$$

wobei

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{\varepsilon}\, Q^t(x)\, A_0\, Q(x), \\ Q(x) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha x) & \sin(\alpha x) \\ -\sin(\alpha x) & \cos(\alpha x) \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -1 & \mu \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

mit $\mu, \varepsilon, \alpha \in \mathbb{R}$ und $\mu < 0 < \varepsilon$.

a) Zeigen Sie, dass für den transformierten Vektor $z = Q(x)y$ folgende Differentialgleichung gilt:

$$z' = Bz,\ B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{\mu}{\varepsilon} + \alpha \\ -\alpha & -\frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die Lösung $z(x)$ explizit an. Wie verhält sich $z(x)$ für $\alpha = -3, \mu = 3$ und $\varepsilon = \frac{1}{3}$ für $x \to \infty$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (*)!

c) Rechnen Sie nach, dass die implizite Trapezregel

$$\eta_k = \eta_{k-1} + \frac{h}{2}\Big(f(x_{k-1}, \eta_{k-1}) + f(x_k, \eta_k) \Big) \ ,$$

angewandt auf $(*)$ die folgende Darstellung liefert:

$$\eta_k = \big(I - \frac{h}{2} A(x_k)\big)^{-1} \ \big(I + \frac{h}{2} A(x_{k-1})\big)\eta_{k-1} \ .$$

d) Weisen Sie für die transformierte Gitterfunktion $\delta_k = Q(x_k)\,\eta_k$ die Darstellung

$$\delta_k = M\delta_{k-1} \text{ mit } M = \big(I - \frac{h}{2\varepsilon} A_0\big)^{-1} Q(h)\, \big(I + \frac{h}{2\varepsilon} A_0\big)$$

nach.

e) Zeigen Sie für $\gamma = -\alpha h,\ \alpha < 0,\ \varepsilon = -\frac{1}{4}\alpha h^2$

$$M \quad = \quad -I_2 - \gamma \begin{pmatrix} -1 + \mu & -(1 + \mu + \mu^2) \\ 1 & -1 - \mu \end{pmatrix} + O(\gamma^2)$$

f) Folgern Sie, dass für γ klein und $\mu < -2$ die diskrete Lösung η_k exponentiell wächst, während $y(x_k)$ exponentiell abklingt.

g) Die implizite Trapezregel ist A-stabil. Diskutieren Sie die Aussage in f) unter diesem Aspekt.

Aufgabe 44 (3 Punkte)

Beweisen Sie den Satz der Vorlesung:

Die charakteristische Schrittweite $h_{\max}$ zur Vererbung der asymptotischen Stabilität ist gegeben durch

$$h_{\max} = \min_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{r_S(\arg \lambda)}{|\lambda|}$$

mit $r_S(\varphi) := \sup\{\hat{r} : re^{\imath\varphi} \in \overset{\circ}{S}\ \forall r \in]0, \hat{r}]\}$, wobei S das Stabilitätsgebiet des zugrunde liegenden Einzelschrittverfahren ist.

Abgabe der bearbeiteten Aufgaben bis **Donnerstag, 7. Februar 2008, 11:30 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Mathematik I/II/III" neben der Treppe im 1. OG des Mathematik-Gebäudes, gegenüber Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer.

Besprechung der Aufgaben: **Donnerstag, 7. Februar 2008**, 14:00-15:30 Uhr in Neuer–Hörsaal (Gebäude 20.40).

Die neuen Übungsblätter werden in der Regel donnerstags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w`

abgelegt.