



## Numerische Mathematik II Übungsblatt 13

(Wintersemester 2007/2008)

7. Februar 2008

### Aufgabe 45

( mündlich )

Wir betrachten das diagonal-implizite Runge-Kutta-Verfahren 2. Stufe

$$\begin{array}{c|cc} \alpha & & \alpha \\ \hline 1 & 1 - \alpha & \alpha \\ \hline & 1 - \alpha & \alpha \end{array}$$

- a) Bestimmen Sie  $\alpha$ , so dass das Verfahren 2. Ordnung ist.  
b) Zeigen Sie, dass  $u_n$  durch einfache implizite Schritte

$$z = u_{n-1} + \alpha \tau_n f(t_{n-1} + \alpha \tau_n, z), \quad y = \frac{2\alpha - 1}{\alpha} u_{n-1} + \frac{1 - \alpha}{\alpha} z,$$

und  $u_n = y + \alpha \tau_n f(t_n, u_n)$  berechnet werden kann.

- c) Berechnen Sie die zugehörige rationale Funktion  $R(z) = P(z)/Q(z)$ .  
d) Zeigen Sie: Das Verfahren ist A- und L-stabil.

### Aufgabe 46

( mündlich )

Wählen Sie eine Quadraturformel mit 2 Stützpunkten  $c_1$  und  $c_2$  und bestimmen Sie das Butcher-Schema von maximaler Konsistenzordnung

$$\begin{array}{c|c} c & \mathcal{A} \\ \hline & b^T \end{array}$$

des zugehörigen Kollokationsverfahrens.

### Aufgabe 47

( mündlich )

Zeigen Sie:

- a) Die Koeffizienten eines durch Kollokation definierten impliziten Runge-Kutta-Verfahrens erfüllen

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, s \quad (*)$$

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \quad i, k = 1, \dots, s.$$

- b) Insbesondere ist dieses Runge-Kutta-Verfahren konsistent und invariant gegen Autonomisierung.  
c) Die Eigenschaft (\*) bedeutet, dass die Quadraturformel

$$\sum_{i=1}^s b_i P(c_i) \approx \int_0^1 P(t) dt$$

exakt ist für  $P \in \mathcal{P}_{s-1}$ .

- d) Die Matrix  $\mathcal{A} = (a_{ij})$  ist genau dann invertierbar, wenn das Produkt der Stützstellen die Beziehung  $c_1 \dots c_s \neq 0$  erfüllt.

**Studienbegleitende Prüfungsklausur** ist am  
Montag, **31. März 2008**, von 9:00 - 11:00 Uhr  
im Hertz Hörsaal (Gebäude 10.11).

Eine **Fragestunde** zur Klausur findet am  
Montag, **17. März 2008**, um 10:00 Uhr im S11 (Gebäude 20.30)  
statt.

**Besprechung** der Aufgaben: **Donnerstag, 14. Februar 2008**, 14:00-15:30 Uhr in  
Neuer-Hörsaal (Gebäude 20.40).

Weiter Informationen finden Sie auf unserer Website

[http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik\\_2\\_2007w](http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w)  
abgelegt.