Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Prof. Dr. Andreas Rieder, Dipl.-Math. Wolfgang Müller

Numerische Mathematik II
5. Programmierübungsblatt

(Wintersemester 2007/2008) 31. Januar 2008

Aufgabe 5

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines Satelliten um das System Erde/Mond lauten in den Koordinaten $x = (x_1, x_2)$ des mitrotierenden Schwerpunktsystems

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 + 2x_2' - \hat{\mu}\,\frac{x_1 + \mu}{N_1} - \mu\,\frac{x_1 - \hat{\mu}}{N_2} \\ x_2'' &= x_2 - 2x_1' - \hat{\mu}\,\frac{x_2}{N_1} - \mu\,\frac{x_2}{N_2} \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$N_1 = \left((x_1 + \mu)^2 + x_2^2\right)^{3/2} \;, \quad N_2 = \left((x_1 - \hat{\mu})^2 + x_2^2\right)^{3/2} \;,$$

sowie den Daten

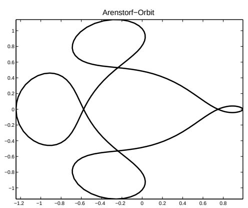
$$\mu = 0.012277471 \;, \quad \hat{\mu} = 1 - \mu.$$

Dabei ist μ das Verhältnis der Mondmasse zur Masse des Gesamtsystems.

Die Anfangswerte

$$x_1(0) = 0.994 \;, \quad x_1'(0) = 0 \;, \quad x_2(0) = 0 \;, \quad x_2'(0) = -2.001585106$$

sind so gewählt, dass sich der kleeblattförmige Arenstorf-Orbit ergibt (siehe nebenstehende Abbildung). Die Periode (Umlaufzeit) dieses Orbits beträgt



$$T = 17.0652166$$

(Zeiteinheit ist ein Monat).

Das Anfangswertproblem soll mit Hilfe einer Schrittweitensteuerung gelöst werden. Diese Schrittweitensteuerung erfolgt über das folgende eingebettete Runge-Kutta-Verfahren (Dormand-Prince-scher-Koeffizientensatz vom Typ RK5(4)):

0							
1/5	1/5						
3/10	3/40	9/40					
4/5	44/45	-56/15	32/9				
8/9	19372/6561	-25360/2187	64448/6561	-212/729			
1	9017/3168	-355/33	46732/5247	49/176	-5103/18656		
1	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	
	35/384	0	500/1113	125/192	-2187/6784	11/84	0
	5179/57600	0	7571/16695	393/640	-92097/339200	187/2100	1/40

Starten Sie mit der Schrittweite $h = 0.001$ und benutzen Sie die Fehlertoleranz $\varepsilon = 10^{-6}$ sowie den Sicherheitsfaktor $\rho = 0.9$. Die letzte Schrittweite soll so bestimmt werden, dass $t = T$ erreicht wird. Geben Sie in jedem Schritt die aktuelle Schrittweite sowie die Näherungswerte $x_1(t)$ und $x_2(t)$ aus. Bestimmen Sie weiterhin die Anzahl der benötigten Funktionsauswertungen.

Wie viele Funktionsauswertungen sind nötig, wenn man das Runge-Kutta-Verfahren 5. Ordnung mit der festen Schrittweite $h = 0.01$ verwendet? Die letzte Schrittweite soll wiederum so bestimmt werden, dass $t = T$ erreicht wird. Lassen Sie die Näherungswerte $x_1(t)$ und $x_2(t)$ hier nur für jeden zehnten Schritt ausgeben.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Abgabe, Vorführung und Erläuterung der bearbeiteten Programmieraufgabe in der Programmierbetreuung im Rechenzentrum, K-Pool (Raum 114a), jeden Mittwoch von 14:15-17:15Uhr. Abgabe bis **spätestens Mittwoch, den 13. Februar 2008** möglich.

Die neuen Programmierübungsblätter werden in der Regel freitags in der Übung ausgegeben und zusätzlich auf der Website

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/ianm3/lehre/numerik_2_2007w`

abgelegt.