Numerische Mathematik II
– Spektralanalyse mit der DFT –

Andreas Rieder

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

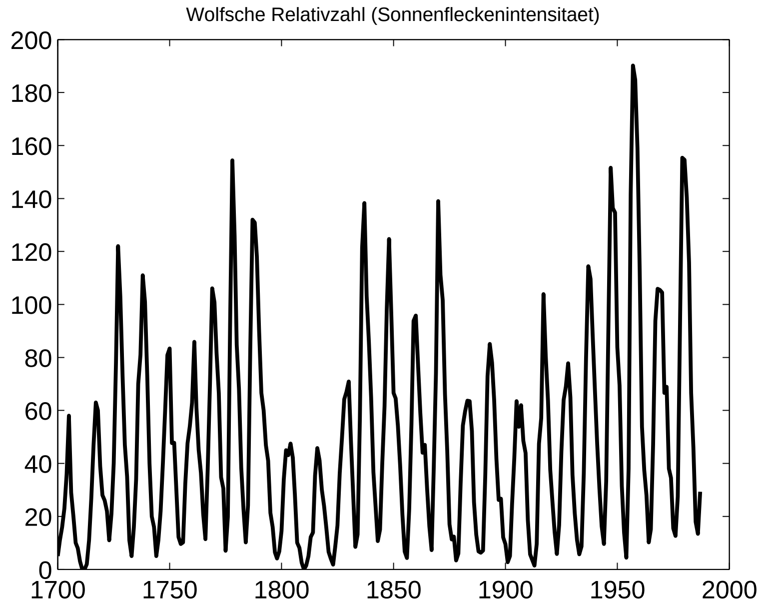
Institut für Wissenschaftliches Rechnen
und Mathematische Modellbildung

und

Institut für Angewandte und
Numerische Mathematik

Sonnenflecken-Relativzahl (Wolfsche Relativzahl)

Sonnenflecken treten zyklisch auf. Ungefähr alle 11 Jahre erreicht die Sonnenfleckenaktiviät ihr Maximum. Dies wollen wir mit der DFT bestätigen.
Die Sonnenfleckenintesität eines Jahres wird durch die Sonnenflecken-Relativzahl (Wolfsche Relativzahl) gemessen. Astronomen haben diese Zahl seit fast 300 Jahren tabelliert.



Wolfsche Relativzahl von 1700 bis 1987

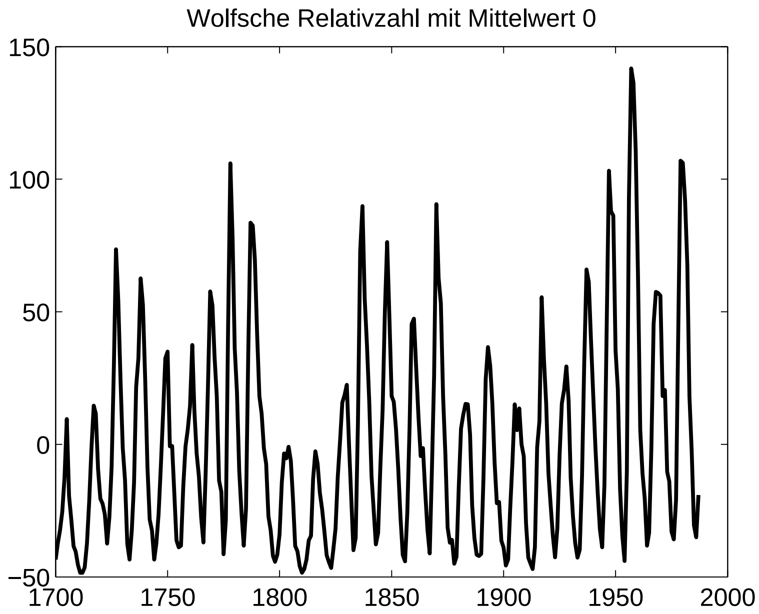
Periodogramm I

Der Vektor $f \in \mathbb{C}^{288}$ beinhalte die gemessenen 288 Werte:

$$f_k : \text{ Wolfsche Zahl des Jahres } 1700 + k, \; k = 0, \ldots, 287.$$

Da wir nur an Schwingungen (periodische Vorgänge) interessiert sind, transformieren wir f so, daß der neue Vektor einen verschwindenen Mittelwert hat: Setzte

$$f_j^0 = f_j - \frac{1}{288} \sum_{k=0}^{287} f_k, \quad \text{d.h.} \; \sum_{k=0}^{287} f_k^0 = 0 \; \text{ bzw. } (\mathcal{D}_{288} f^0)_0 = 0.$$



Periodogramm II

Unter dem Periodogramm von f^0 verstehen wir die Werte $|(\mathcal{D}_{288} f^0)_k|^2$ aufgetragen gegen die Indizes $k = 0, \ldots, 287$. Wegen

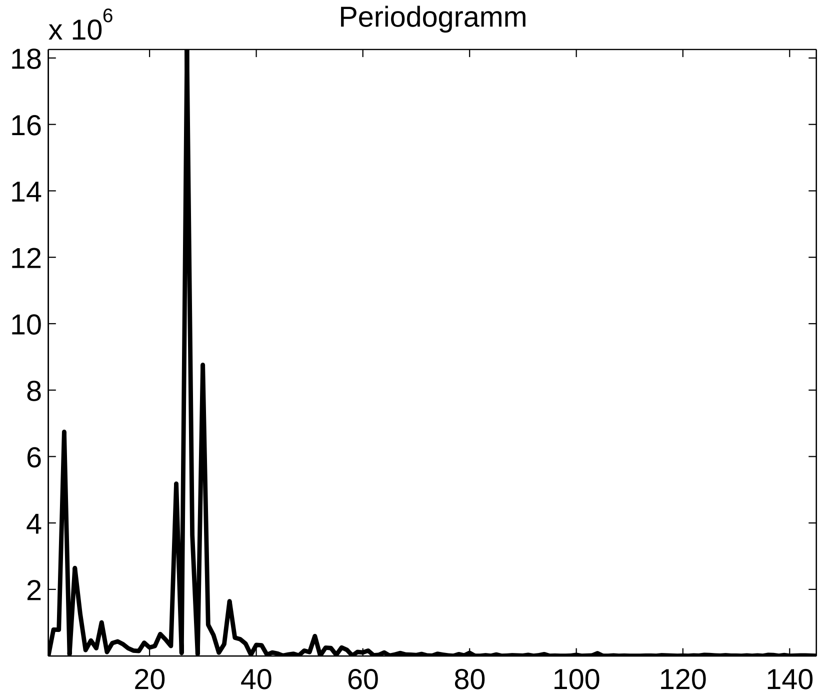
$$\mathrm{w}_k = \overline{\mathrm{w}}_{288-k}, \text{ was } |(\mathcal{D}_{288} f^0)_k| = |(\mathcal{D}_{288} f^0)_{288-k}| \text{ impliziert,}$$

genügt es, für k nur die Werte $\{0, 1, 2, \ldots, 144\}$ zu betrachten. Das Peridogramm hat ein ausgeprägtes globales Maximum bei $k = 26$, d.h. die Schwingung $\mathrm{w}_{26} \in \mathbb{C}^{288}$ ist dominant in f^0 bzw. in f:

$$f^0 = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathcal{D}_n f^0)_k \overline{\mathrm{w}}_k$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \langle f^0, \overline{\mathrm{w}}_k \rangle_{\mathbb{C}^n} \overline{\mathrm{w}}_k,$$

$$\|\mathcal{D}_n f\|_{\mathbb{C}^n} = \|f\|_{\mathbb{C}^n}.$$



Interpretation

Zur Interpretation des Periodogramms betrachten wir $\mathrm{w}_k \in \mathbb{C}^n$ genauer:

$$(\mathrm{w}_k)_j = p_k(t_j) \;\text{ mit } p_k(t) = \cos(2\pi k\, t) - i\, \sin(2\pi k\, t) \text{ und } t_j = j/n.$$

Also ist w_k eine diskrete Version der Funktion p_k über dem Zeitintervall $[0,1]$. Die Periode von p_k ist $\frac{1}{k}$, d.h. p_k bzw. w_k vollzieht k Perioden (Schwingungen) in einer Zeiteinheit.

In unserer konkreten Situation bedeutet dies: w_{26} vollzieht 26 Schwingungen im Zeitraum von 288 Jahren, also hat eine Schwingung die Periode $\frac{288}{26}$ Jahre. Die dominante Schwingung in der Wolfschen Relativzahl wiederholt sich ungefähr alle 11 Jahre.