Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Angewandte
und Numerische Mathematik

Numerische Methoden für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

5. Übungsblatt

Aufgabe 1: (2 Punkte)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $\|\cdot\|$ bezeichne sowohl eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ als auch die zugehörige Operatornorm. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\|A^{-1}\| = \left(\min_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\| \right)^{-1}, \quad \kappa(A) = \frac{\max_{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|=1}\|Ax\|}{\min_{x\in\mathbb{R}^n,\|x\|=1}\|Ax\|}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Wir definieren: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch positiv definit*, wenn $A = A^t$ und für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t Ax > 0$.

a) Folgern Sie aus obiger Definition, dass für eine symmetrisch positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ alle Diagonalelemente und alle Eigenwerte positiv sind.

b) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LL^t$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Die Zerlegung darf/soll durch Skalieren der LR-Zerlegung berechnet werden.

Aufgabe 3: (2 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Bandmatrix der Bandbreite $2m + 1 < n$ (d.h. $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > m$), für welche die LR-Zerlegung ohne Zeilentausch existiert.

a) Beweisen Sie, dass auch L und R diese Bandstruktur haben.

b) Wie hoch ist der Aufwand einer LR-Zerlegung für eine solche Matrix, wenn $n \gg m$? Es reicht, den Term führender Ordnung in n und m anzugeben.

—
Abgabe: Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **23.5.2008**, **9.45 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Methoden für Informatiker" im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. **Beachten Sie, dass zu spät oder falsch abgegebene Blätter mindestens eine Punktreduktion um die Hälfte erhalten.**