Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Numerische Methoden für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

PD Dr. Nicolas Neuss

9. Übungsblatt

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Bei der Diskretisierung des Randwertproblems

$$-u''(x) = f(x)\,, \quad x \in (0,1)\,, \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit sogenannten *Finiten Differenzen* auf einem Gitter der Gitterweite $h = \frac{1}{n+1}$ entsteht die $n \times n$-Tridiagonalmatrix

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots, n$ die Eigenvektoren $v^{(k)}$ durch $v_i^{(k)} = \sin(ik\pi h)$ und die Eigenwerte als $\lambda_k = 2h^{-2}(1-\cos(k\pi h))$ gegeben sind. Wie groß ist also die Spektralkondition dieser Matrix?

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Das einfachste iterative Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = y$ mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix A ist die Iteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + B(y - Ax^{(k)})\,, \quad B = \frac{\omega}{\|A\|_2}$$

mit einem Dämpfungsfaktor $0 < \omega < 2$. Zur Konvergenzanalyse betrachten wir den Fehler $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, wobei x die exakte Lösung ist. Zeigen Sie, dass diese Iteration in der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ konvergiert.

—
Abgabe: Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **20.6.2008, 9.45 Uhr** in den Einwurfschlitz „Numerische Methoden für Informatiker“ im Treppenhaus des Mathematik-Gebäudes, 1. OG, gegenüber von Zimmer 112. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. **Beachten Sie, dass zu spät oder falsch abgegebene Blätter mindestens eine Punktreduktion um die Hälfte erhalten.**