

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 1

Abgabe: bis 23.04.2015 um 18:00 Uhr

Aufgabe 1 (LR-Zerlegung)

(3+3+4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren $b = (2, 2, 2, 2)^\top$, $\bar{b} = (1, 1, 3, 2)^\top$ und $\hat{b} = (4, 2, 1, 3)^\top$.

- Lösen Sie das LGS $Mx = b$ mit dem Gauß-Algorithmus wie in der linearen Algebra.
- Lösen Sie die LGSe $Ly = b$ und $Rx = y$, indem Sie die Struktur von L und R ausnutzen.
- Zeigen Sie, dass $LR = M$ gilt, und verwenden Sie Ihre Erkenntnisse aus b), um $M\bar{x} = \bar{b}$ und $M\hat{x} = \hat{b}$ zu lösen.

Aufgabe 2 (Vorwärtssubstitution)

(10 Punkte)

Formulieren Sie einen Algorithmus zum Lösen des Gleichungssystems $Ly = b$, wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist. Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an. Wieviele und welche Operationen (Multiplikation + Addition = Operation) sind zur Bestimmung von y nötig? Was ändert sich jeweils, wenn auf der Diagonalen von L nur Einsen stehen?

Aufgabe 3 (Gleitkommaarithmetik)

(10 Punkte)

Ein Beispielrechner verwendet Gleitkommaarithmetik zur Basis $d = 2$ mit Mantissenlänge $l = 3$ und $e_{\min} = -1$, $e_{\max} = 3$. Es werden positive und negative Zahlen unterstützt. Bestimmen Sie alle darstellbaren normierten Maschinenzahlen und tragen Sie diese auf einem Zahlenstrahl auf. Was beobachten Sie?

Aufgabe 4 (Gleitkommaarithmetik)

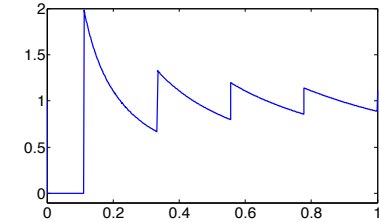
(6+(2+2) Punkte)

In der Vorlesung wurde die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

betrachtet. Nun wurde f für kleine x mit folgendem Algorithmus ausgewertet, was den gezeigten Plot ergibt¹.

```
def f(x):
    if x == 0:
        return 1
    else:
        return (exp(x)-1)/x
```



- Begründen Sie im Verlauf des Graphen das Auftreten des konstanten Teils und der Zacken. Erklären Sie dabei insbesondere, warum der Sprung von 0 auf den Wert 2 auftritt.
- Mit folgendem Algorithmus werden die obigen Probleme gelöst.

```
def g(x):
    y = exp(x)
    if y == 1:
        return 1
    else:
        return (y-1)/log(y)
```

- Was ändert sich im Bereich, in dem der ursprüngliche Algorithmus den konstanten Wert 0 liefert?
- Warum verschwinden die Zacken im Plot?

Hinweis: Wie ändert sich der Wert von $\exp(x)$ zwischen zwei Sprüngen im Bild?

Weitere Informationen finden Sie auf der Rückseite

¹Wir verwenden Python-Code als Beispiel.

Programmieraufgabe 1

(freiwillig)

Schreiben Sie ein Programm, das die Näherungswerte $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \approx e^x$ berechnet und für $x = -5,5$ und $n = 1, 2, \dots, 30$ plottet. Die Berechnung soll auf folgende drei Arten erfolgen:

- (a) mittels obiger Formel
- (b) mit der Umformung $e^{-5,5} = 1/e^{5,5}$ und obiger Formel
- (c) mit der Umformung $e^{-5,5} = 1/((e^{0,5})^{11})$ und obiger Formel

Erklären Sie die beobachteten Effekte. Welches zusätzliche Phänomen tritt für $x = -20$ auf?

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **23.04.2015 um 18:00 Uhr** in den Einwurfschlitze **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 24.04.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter <https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180> für die Teilnahme an den Übungen.