

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen
Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 2

Abgabe: bis 07.05.2015 um 18:00 Uhr

Aufgabe 5 (Stabilität des Gauß-Algorithmus) (12 = 6 + 6 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 10^{-3} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A ohne Pivotisierung im Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen und lösen Sie anschließend das LGS $Ax = b$.
- Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A ohne Pivotisierung in den Maschinenzahlen mit $d = 10$, $l = 2$, $e_{\min} = -3$ und $e_{\max} = 4$ und lösen Sie anschließend das LGS $Ax = b$.

Aufgabe 6 (Matrixnormen) (10 = 4 + 4 + 2 Punkte)

Für eine Vektornorm $|\cdot|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die zugehörige Matrixnorm definiert durch

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

- Zeigen Sie, dass der Name *Matrixnorm* gerechtfertigt ist, indem Sie beweisen, dass $\|\cdot\|$ eine Norm ist.
- Zeigen Sie $\|I\| = 1$, $|Ax| \leq \|A\||x|$ und $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Welche Eigenschaft zeichnet $C = \|A\|$ unter allen $C \geq 0$ aus, die die Abschätzung $|Ax| \leq C|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllen?

Aufgabe 7 (Untere Dreiecksmatrizen) (9 = 0 + 3 + 3 + 3 Punkte)

Zu einem Vektor $\ell \in \mathbb{R}^n$, dessen erste k gleich 0 sind, betrachten Sie

$$L_k(\ell) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{k+1} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\ell_n & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

- Machen Sie sich für $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$ folgenden Zusammenhang klar:

$$uv^T = (v_1u|v_2u|\dots|v_mu) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

- Zeigen Sie, dass $L_k(\ell)^{-1} = L_k(-\ell)$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung $L_k(\ell) = I - \ell e_k^T$.

- Seien $m < k$ und $\ell^m, \ell^k \in \mathbb{R}^n$, wobei die ersten m bzw. k Einträge von ℓ^m bzw. ℓ^k verschwinden. Zeigen Sie

$$L_m(\ell^m)L_k(\ell^k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & -\ell_{m+1}^m & 1 & & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & & & & \\ & & \vdots & & & & 1 & & & \\ & & \vdots & & & & -\ell_{k+1}^k & 1 & & \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\ell_n^m & & & & -\ell_n^k & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie erneut die Darstellung aus a).

- Geben Sie nun die Nichtnulleinträge von $L = L_1(\ell^1)^{-1} \dots L_{n-1}(\ell^{n-1})^{-1}$ aus der LR-Zerlegung an.

Aufgabe 8 (Permutationsmatrizen) (9 = 2 + 3 + 4 Punkte)

Für $r, s \in \{1, \dots, n\}$ sei $P^{(r,s)} = I - e_r e_r^\top - e_s e_s^\top + e_r e_s^\top + e_s e_r^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- (a) Geben Sie die $P^{(2,4)} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und $P^{(1,3)} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ an.
- (b) Bestimmen Sie für $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3,4} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ die Matrizen $P^{(2,4)}A$ sowie $AP^{(2,4)}$.

Beschreiben Sie jeweils in einem Satz, wie die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit $P^{(2,4)}$ auf A wirkt.

- (c) Nun seien $s > r > k$ sowie $\ell^k \in \mathbb{R}^n$ wie in b). Geben Sie die Nichtnulleinträge von $P^{(r,s)} L_k (\ell^k)^{-1} (P^{(r,s)})^{-1}$ an.

Hinweis: Es gilt $(P^{(r,s)})^{-1} = P^{(r,s)}$.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **07.05.2015 um 18:00 Uhr** in den Einwurfschlitze **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 08.05.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/> finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter <https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180> für die Teilnahme an den Übungen.