Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2015
Dr. Daniel Weiß, Dipl.-Math. Johannes Ernesti

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 3

Abgabe: bis 21.05.2015 um 18:00 Uhr

Aufgabe 9 (Spektralnorm) (14 = 2 + 2 + 4 + 6 Punkte)

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte.

(a) Zeigen Sie, dass $\lambda \geq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$ gilt, falls A positiv semi-definit ist. Was ändert sich, wenn A positiv definit ist?

(b) Zeigen Sie, dass ein hermitesches $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, d. h. $A^\top = \overline{A}$, nur reelle Eigenwerte besitzt. Insbesondere hat dann eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nur relle Eigenwerte.

Hinweis: Betrachten Sie A als lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^n$ und setzen Sie $x^\top A\overline{x}$ für einen Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^n$ an.

(c) Beweisen Sie für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ den Zusammenhang $\sigma(AA^\top) \setminus \{0\} = \sigma(A^\top A) \setminus \{0\}$ und geben Sie ein Beispiel, bei dem $0 \in \sigma(AA^\top)$ und $0 \notin \sigma(A^\top A)$ gelten.

(d) Zeigen Sie die Gleichung $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dabei ist $\lambda_{\max}(B) = \max_{\lambda\in\sigma(B)} |\lambda|$ der betragsmäßig größte Eigenwert einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Hinweis: Nutzen Sie den Satz aus der linearen Algebra, nach dem zu jeder symmetrischen Matrix eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren existiert. Auch die Ausführungen in Skript sind hilfreich...

Aufgabe 10 (Newton-Verfahren) (14 = 2 + 4 + 4 + 4 Punkte)

Gegeben seien der Kreis $K = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ sowie die Hyperbel $H = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$.

(a) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte von K und H.

(b) Formulieren Sie das Problem aus a) als Nullstellenproblem $F(x, y) = (0, 0)^\top$ mit einer geeigneten Funktion $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und geben Sie für dieses Problem das Newton-Verfahren mit Startwert $(x^0, y^0)^\top = (1, 1)^\top$ an.

(c) Führen Sie das Newton-Verfahren für das Problem aus b) aus, wobei Sie die abbrechen, sobald $|\Delta x^k|_2 < 0.1$ gilt.

(d) Betrachten Sie für festes $\epsilon > 0$ statt F aus b) die Funktion $F_\epsilon = \epsilon F$. Geben Sie die Lösungen von $F_\epsilon(x, y) = (0, 0)^\top$ an und formulieren Sie das Newton-Verfahren für diese Gleichung.

Erklären Sie an diesem Beispiel, warum die Stoppregel $|F(x^k)|_2 <$ tol im Gegensatz zu $|\Delta x^k|_2 <$ tol für das Newton-Verfahren nicht sinnvoll ist.

Hinweis: Alle Exponenten sind Indizes!

Aufgabe 11 (Lineare Ausgleichsrechnung) (10 Punkte)

Um den Standort eines angeleinten Habichts festzustellen, werden von fünf Naturschützern die Richtungen bestimmt, aus denen der Ruf des gefangenen Vogels zu hören ist. Die Positionen der Naturschützer in einem (x, y)-Koordinatensystem lauten:

Naturschützer	Emil	Edith	Heinrich	Gertrud	Rudolf
x-Koordinate	8	22	36	10	13
y-Koordinate	0	7	18	20	10
$\tan\alpha$	1	-1/2	1/2	-1	0

Dabei ist der Winkel α jeweils im mathematisch positiven Sinn von der positiven x-Achse aus gemessen.

Skizzieren Sie die Situation in einem Koordinatensystem und stellen Sie ein lineares Ausgleichsproblem für die Position des Habichts auf. Wo befindet sich der Habicht nach diesem Modell?

Aufgabe 12 (Cholesky-Zerlegung) (10 Punkte)

Für welche Parameter $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A symmetrisch und positiv definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \gamma \\ 3 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Algorithmus zur Berechnung der Cholesky-Zerlegung.

Rückseite $\longrightarrow$

Programmieraufgabe 2 (freiwillig)

Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Matrix

$$W^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

bei der in der letzten Spalte und auf der Hauptdiagonalen nur Einsen und unterhalb der Hauptdiagonalen nur Minuseinsen stehen. Schreiben Sie ein Programm[1], dass die LR-Zerlegung $L^n R^n = W^n$ für $n \in \{5k\colon k = 1, \dots, 40\}$ berechnet.

(a) Was fällt Ihnen auf?

(b) Wie verhält sich der Fehler $e_n = \max_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |(L^n R^n)_{ij} - W^n_{ij}|$?

Programmieraufgabe 3 (freiwillig)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass A eine LR-Zerlegung besitzt. Betrachten Sie die folgende Rechnung.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & a_{12} \\ a_{21}^\top & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ l_{21}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11}R_{11} & L_{11}r_{12} \\ l_{21}^\top R_{11} & l_{21}^\top r_{12} + r_{22} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Dabei sind $A_{11}, L_{11}, R_{11} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die oberen linken Teile der Matrizen A, L, R und $a_{21}, a_{12}, l_{21}, r_{12} \in \mathbb{R}^{n-1}$ sowie $a_{22}, r_{22} \in \mathbb{R}$ die restlichen Nicht-Null-Teile der Matrizen.

(a) Leiten Sie aus (*) einen iterativen Algorithmus her, der unter der Annahme, dass L_{11} und R_{11} bekannt sind, die Werte von r_{12}, l_{21} und r_{22} berechnet.

Verwenden Sie zur Lösung auftretender linearer Probleme ausschließlich die Vorwärtssubstitution.

(b) Implementieren Sie den Algorithmus in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.

[1] Alternativ verwenden Sie Standardsoftware wie MATLAB oder Scipy.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **21.05.2015 um 18:00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 22.05.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180 für die Teilnahme an den Übungen.