Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2015
Dr. Daniel Weiß, Dipl.-Math. Johannes Ernesti

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 4 (1)

Abgabe: bis 11.06.2015 um 18:00 Uhr

Aufgabe 14 (Banachscher Fixpunktsatz) (10 = 7 + 3 Punkte)

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ und $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2 \subset \mathbb{R}^2$ die Abbildung $\varphi_{a,b} \colon D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi_{a,b}(x, y) = \begin{pmatrix} a\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(y) \\ a\sin(x) + b\cos(y) \end{pmatrix}, \qquad (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Der Raum $\mathbb{R}^2$ sei mit der Supremumsnorm $|\cdot|_\infty$ versehen.

(a) Bestimmen Sie ein möglichst großes Gebiet $M \subset \mathbb{R}^2$, sodass $\varphi_{a,b}$ in D für alle $(a, b)^\top \in M$ den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.

(b) Betrachten Sie für $a = b = \frac{1}{5}$ die Fixpunktiteration

$$(x_0, y_0)^\top = 0, \qquad (x_{k+1}, y_{k+1})^\top = \varphi_{a,b}(x_k, y_k), \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Wie viele Schritte sind hinreichend, um $\|(x_k, y_k)^\top - (x^*, y^*)^\top\|_\infty \leq 10^{-4}$ zu garantieren, wobei $(x^*, y^*)^\top \in J$ der Fixpunkt von $\varphi_{a,b}$ sei?

Aufgabe 15 (CG-Verfahren) (5 = 3 + 2 Punkte)

Zu einer spd Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und $b \in \mathbb{R}^N$ betrachten wir das Problem

$$\text{finde } x^* \in \mathbb{R}^N \text{ mit } Ax^* = b.$$

(a) In Abbildung 1 ist die Norm des Residuums des CG-Verfahrens für 25 Iterationen aufgetragen. Erklären Sie den Sprung beim Schritt 15, indem Sie ein Beispiel in $\mathbb{R}^3$ skizzieren, bei dem das Residuum in den ersten beiden Schritten unwesentlich kleiner wird.

(b) Beim CG-Verfahren mit Vorkonditionierer $M = CC^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (regulär) wird die Matrix MA verwendet. Zeigen Sie: $\sigma(MA) = \sigma(C^\top AC)$ und $C^\top AC$ ist spd.

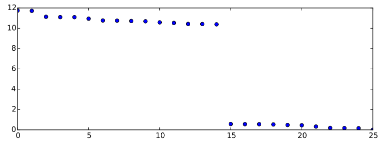

Abbildung 1: Folge der Residuen-Normen einer Ausführung des CG-Verfahrens.

Aufgabe 16 (CCS-Format) (10 = 2 + (4 + 2 + 2) Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times M}$ mit $K \in \mathbb{N}$ Einträgen, die ungleich 0 sind. Das CCS-Format besteht aus drei Vektoren $v \in \mathbb{R}^K$, $z \in \mathbb{N}^K$ und $p \in \mathbb{N}^{M+1}$, wobei v die Einträge der Matrix, z die Zeilennummer des Eintrags in v mit gleichem Index und p die Positionen der Spalten von A in v kodieren.

Für $k \in \{1, \dots, N\}$, $l \in \{1, \dots, M\}$, $m \in \{1, \dots, K\}$ gilt der Zusammenhang

$$A_{kl} = v_m \quad \Longleftrightarrow \quad z_m = k \text{ und } p_l \leq m < p_{l+1}.$$

Der Wert p_l gibt also den Index des ersten Nichtnulleintrags in v an, der zur l-ten Spalte von A gehört und p_{l+1} den Index des ersten Nichtnulleintrags in v, der nicht mehr zur l-ten Spalte von A gehört. Ein Beispiel für das CCS ist

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} v &= (1.1, 3, 4, 6, 7, 2, 5, 8)^\top, \\ z &= (1, 2, 2, 3, 4, 1, 2, 4)^\top, \\ p &= (1, 3, 6, 6, 9)^\top. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die folgenden Matrizen im CCS-Format an.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Seien $A \in \mathbb{R}^{N\times M}$, $x \in \mathbb{R}^M$ und $y \in \mathbb{R}^N$.

(i) Geben Sie Algorithmen in Pseudocode an, um Ax und $A^\top y$ zu berechnen, falls A im CCS-Format vorliegt.

(ii) Wie viele Operationen sind jeweils notwendig?

(iii) Wie viele Operationen sind jeweils nötig, wenn A vollbesetzt ist und nicht im CCS-Format vorliegt?

Rückseite ⟶

Aufgabe 17 (Bisektionsverfahren) (5 = 1 + 2 + 2 Punkte)

Es sei $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Nullstelle $x^* \in (a,b)$. Mithilfe des Bisektionsverfahrens wird diese Nullstelle durch Intervallschachtelung lokalisiert.

Im ersten Schritt bildet man dazu $s = \frac{1}{2}(a+b)$ und bestimmt $f(s)$.

(i) Falls $f(s) = 0$, so ist s eine Nullstelle von f.

(ii) Gilt $f(a) \cdot f(s) < 0$, so gibt es eine Nullstelle $x^* \in (a,s)$.

(iii) Gilt $f(s) \cdot f(b) < 0$, so gibt es eine Nullstelle $x^* \in (s,b)$.

Gegebenenfalls wird dieser Schritt mit dem entsprechend verkleinerten Intervall wiederholt.

(a) Zeigen Sie, dass nach der k-ten Wiederholung des obigen Verfahrens die Abschätzung

$$|x^* - x| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

für alle x aus dem verbleibenden Intervall gilt.

(b) Erläutern sie das Vorgehen bis zum 3-ten Schritt anhand einer grafischen Darstellung für die Funktion $f(t) = t^3 - 4t$, $t \in \mathbb{R}$ und $a = 1$, $b = 5$.

(c) Formulieren Sie den Algorithmus in Pseudocode.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **11.06.2015 um 18:00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 12.06.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180 für die Teilnahme an den Übungen.