Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2015
Dr. Daniel Weiß, Dipl.-Math. Johannes Ernesti

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 4 (2)

Abgabe: bis 11.06.2015 um 18:00 Uhr

Aufgabe 18 (CG-Verfahren) (10 = 4 + 3 + 3 Punkte)

Für den Startwert $x^0 \in \mathbb{R}^N$ und die k-te Iterierte $x^k \in \mathbb{R}^N$ des CG-Verfahrens für eine spd-Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x^* - x^k\|_A \leq \max_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)| \cdot \|x^* - x^0\|_A, \tag{1}$$

wobei p ein beliebiges Polynom vom Grad k mit $p(0) = 1$ ist.

(a) Es sei $L = |\sigma(A)|$ die Anzahl der Eigenwerte von A. Zeigen Sie mithilfe von (1), dass das CG-Verfahren nach maximal L Schritten die exakte Lösung liefert, wenn die Arithmetik des Rechners exakt ist.

Nehmen Sie nun an, dass es $r > 0$ (klein) und $t_1, \dots, t_M > 0$ gibt, sodass

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{M} (t_i - r, t_i + r)$$

gilt, d. h. die Eigenwerte von A sind in M Clustern der Breite $2r$ angeordnet. Setze $t_0 = 0$ und

$$d_{\min} = \min_{i=1,\dots,M} |t_i - t_{i-1}|, \qquad d_{\max} = \max_{i=1,\dots,M} |t_i - t_{i-1}|$$

d. h. $d_{\max}$ ist der maximale Abstand zweier Clustermittelpunkte (die 0 eingeschlossen) und $d_{\min}$ der entsprechende minimale Abstand.

(b) Geben Sie ein Polynom p_M vom Grad M an, das

$$p_M(t_i) = 0, \quad i = 1, \dots, M, \qquad \text{und} \qquad p(0) = 1$$

erfüllt und bestimmen Sie die Ableitung p'_M.

(c) Es lässt sich eine Abschätzung zeigen, die wir hier *ohne* Beweis verwenden:

$$\max_{\xi\in[t_i-r,t_i+r]} |p'_M(\xi)| \leq \left(1 + \frac{2r}{d_{\max}}\right)^M \left(\frac{d_{\max}}{d_{\min}}\right)^M \frac{r^2}{d_{\min}^2}, \quad i = 1, \dots, M. \tag{2}$$

Nutzen Sie (1) und (2), um zu begründen, dass es für die Konvergenz des CG-Verfahrens vorteilhaft ist, wenn es wenige Cluster sind, die weit auseinander liegen und einen kleinen Radius haben.

Nehmen Sie dabei an, dass $d_{\max} \approx d_{\min}$ gilt.

Hinweis: Nutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, um $|p(\lambda)|$ für $\lambda \in \sigma(A)$ abzuschätzen.

Aufgabe 19 (Nullstellen quadratischer Polynome) (10 = 5 + 5 Punkte)

Die Subtraktion zweier annähernd gleicher Zahlen führt zur Stellenauslöschung, da die Operation in diesem Fall schlecht konditioniert ist. Daher sollte insbesondere in Computerprogrammen die Subtraktion von ähnlich großen Zahlen vermieden werden.

Für $p, q \in \mathbb{R}$ betrachten wir die quadratische Gleichung

$$x^2 - 2px + q = 0.$$

und die aus der Schule bekannte p-q-Formel zur Bestimmnung der Nullstellen

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q}. \tag{3}$$

(a) Inwiefern kann das Verhältnis $\frac{p}{q}$ problematisch für die Berechnung der Nullstellen aus (3) sein? (Stichwort: Auslöschung)

(b) Geben Sie eine alternative Berechnungsvorschrift der beiden Nullstellen an, die nicht von dem Problem der Auslöschung betroffen ist.

Hinweis: Satz von Vieta.

Rückseite ⟶

Aufgabe 20 (Dividierte Differenzen) (10 = 4 + 2 + 4 Punkte)
Gegeben Seien die Daten

x_j	0	1	2	3
y_j	-6	2	1	3

.

(a) Bestimmen das Interpolationspolynom mit kleinstmöglichem Grad durch (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 4$, mit Hilfe der Newton-Basis.

(b) Welchen Vorteil bietet die Newton-Basis, wenn ein weiterer Datenpunkt hinzukommt?

(c) Approximieren Sie $\sqrt{5}$ durch Interpolation mit einem Polynom p und geben Sie eine obere Schranke für den Fehler $|p(5) - \sqrt{5}|$ an. Verwenden Sie dabei nur Werte der Funktion $\sqrt{\cdot}$ und ihrer Ableitungen an den Stellen $t_1 = 1$, $t_2 = 4$ und $t_3 = 9$.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **11.06.2015 um 18:00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 12.06.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180 für die Teilnahme an den Übungen.