Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 5

Abgabe: bis 25.06.2015 um 18:00 Uhr

Aufgabe 21 (Transformation und Interpolation) (10 = 2 + 4 + 4 Punkte)
Sei das Interpolationspolynom (IP) p zu $n+1$ Stützpunkten (x_i, f_i), $i = 0, \dots, n$, mit paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \in [a, b]$ gegeben. Gegeben sei weiter eine bijektive affine Transformation $\varphi\colon [a, b] \longrightarrow [\tilde{a}, \tilde{b}]$, $x \longmapsto \alpha x + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, und die transformierten Stützpunkten $(\tilde{x}_i, f_i)$ mit $\tilde{x}_i = \varphi(x_i)$ für $i = 0, \dots, n$.

(i) Gegen Sie das IP zu den affin transformierten Stützpunkten an.

(ii) Zeigen Sie, dass neben den Interpolationseigenschaften (siehe (i)) auch die Approximationseigenschaften bei der oben durchgeführten affinen Transformation erhalten bleiben, d. h. für alle $\tilde{x} \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ gibt es $\tilde{\xi} \in (\tilde{a}, \tilde{b})$ mit

$$\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{p}(\tilde{x}) = \tilde{w}_{n+1}(\tilde{x}) \frac{\tilde{f}^{(n+1)}(\tilde{\xi})}{(n+1)!},$$

wobei $\tilde{w}_{n+1}$ das $(n+1)$-te Newton-Polynom zu $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n$ und $\tilde{f}\colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\tilde{f}(\tilde{x}_i) = f_i$, $i = 0, \dots, n$, ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Kondition des Problems unter der oben definierten affinen Transformation erhalten bleibt, indem Sie nachweisen, dass die Lebesgue-Konstante gleich bleibt.

Aufgabe 22 (Berechnung des Logarithmus) (10 = 1 + 2 + 3 + 2 + 2 Punkte)
Gegeben sei eine Zahl $x = a \cdot 2^N > 0$ in normalisierter Gleitkommadarstellung. Durch

$$\ln x = \ln(a \cdot 2^N) = \ln(a) + N \ln 2$$

kann die Berechnung von $\ln x$ auf die Berechnung von $\ln 2$ auf $\ln(a)$ mit $a \in [1, 2)$ zurückgeführt werden (siehe Vorlesung). Beachte dabei, dass $a \in [1, 2)$ für die Mantisse gilt.
Um $\ln y$ auf dem Intervall $[1, 2)$ zu approximieren, führen wir sogenannte Breakpoints $b_k = 1 + \frac{k}{64}$ für $k = 0, \dots, 64$ ein. Für $y \in [1, 2)$ existiert dann ein b_k mit

$$|y - b_k| \leq \frac{1}{128}.$$

Mit den Logarithmusgesetzen finden wir

$$\ln y = \ln b_k + \ln \frac{y}{b_k},$$

wobei die Werte $\ln b_k$ wiederum bereits mit hinreichender Genauigkeit berechnet seien. Zeigen Sie

(i) Für jedes $y \in [1, 2)$ gibt es ein $r \in \left[\frac{-1}{128}, \frac{1}{128}\right]$ mit $\frac{y}{b_k} = \frac{1+r/2}{1-r/2}$.

(ii) Die Funktion $h\colon \left[\frac{-1}{128}, \frac{1}{128}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \longmapsto \ln \frac{1+r/2}{1-r/2}$, ist wohldefiniert und punktsymmetrisch zum Ursprung.

(iii) Bei punktsymmetrischen Stützpunkten (mit (x_i, f_i) ist auch $(-x_i, -f_i)$ Stützpunkt und aus $x_i = 0$ folgt $f_i = 0$) gilt für das IP in Tschebyscheff-Darstellung $c_{2k} = 0$ für $k = 1, \dots$.

(iv) Sei $p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ das Tschebyscheff-Polynom vom Grad 3 zu h. Geben Sie eine obere Schranke für den Interpolationsfehler an?
Hinweis: Es gilt $h^{(4)} = \frac{96r(r^2+4)}{(4-r^2)^4}$.

(v) Nennen Sie zwei potentielle Möglichkeiten, die Genauigkeit des Ansatzes oben zu erhöhen.

Aufgabe 23 (Min-Max-Eigenschaft) (10 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $p(x) = x^n + \dots$ ein Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient 1. Zeigen Sie

$$\max_{x \in [a,b]} |p(x)| \geq \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} = \max_{x \in [a,b]} \left| \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right) \right|.$$

Hinweis: Nutzen Sie eine affine Transformation wie in Aufgabe 21 und blättern Sie im Skript.

Rückseite ⟶

Aufgabe 24 (Splines) (10 = 6 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben seien $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$ und die Knoten $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

(a) Interpolieren Sie f mit den Stützstellen x_0, x_1, x_2 durch

(i) einen kubischen Spline s_1 mit Randbedingungen $s_1''(x_0) = s_1''(x_2) = 0$,

(ii) einen kubischen Spline s_2 mit Randbedingungen $s_2'(x_0) = f'(x_0)$ und $s_2'(x_2) = f'(x_2)$,

(iii) ein Polynom p vom Grad 4 mit den Randbedingungen $p'(x_0) = f'(x_0)$ und $p'(x_2) = f'(x_2)$.

(b) Bestimmen Sie jeweils den Interpolationsfehler $|f - g|_\infty$, $g \in \{s_1, s_2, p\}$, auf dem Intervall $[-1, 1]$.

Hinweis: Nutzen Sie Symmetrie aus!

(c) Skizzieren Sie f, s_1, s_2 und p auf $[-1, 1]$.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **25.06.2015 um 18:00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 26.06.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180 für die Teilnahme an den Übungen.