Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2015
Dr. Daniel Weiß, Dipl.-Math. Johannes Ernesti

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 6

Abgabe: bis 09.07.2015 um 18:00 Uhr

Aufgabe 25 (Not-A-Knot) (13 Punkte)

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(x_i, f_i) \in [a,b] \times \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, zu interpolierende Stützpunkte. Falls die Werte der Ableitungen an den Randstellen x_0 und x_n nicht bekannt sind, verwendet man bei der Spline-Interpolation oft die “not-a-knot”-Bedingungen

$$s_1'''(x_1) = s_2'''(x_1) \qquad \text{und} \qquad s_{n-1}'''(x_{n-1}) = s_n'''(x_{n-1}),$$

die besagen, dass der Spline auf den Teilintervallen $[x_0, x_2]$ und $[x_{n-2}, x_n]$ durch je ein einziges kubisches Polynom gegeben ist.

Stellen Sie das Gleichungssystem für die Momente $\gamma_i = s_i''(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, auf, wenn die “not-a-knot”-Bedingungen gefordert werden.

Hinweis: Übertragen Sie das Vorgehen auf den Seiten 74-76 im Skript.

Aufgabe 26 (Simpson-Quadratur) (13 = 10 + 3 Punkte)

Bestimmen Sie näherungsweise den Wert des Integrals $\int_0^4 x^2 e^{-5x} \mathrm{d}x$ durch vierfache Verwendung der Simpson-Regel auf äquidistanten Intervallen.

Erläutern Sie kurz, wie sich bei gleichem Aufwand (gemessen in Funktionsauswertungen des Integranden) der Wert genauer approximieren läßt.

Aufgabe 27 (Bernstein-Polynome) (14 = 6 + 6 + 2 Punkte)

Das i-te Bernstein-Polynom vom Grad n bezüglich des Intervalls $[a,b]$ lautet

$$B_i^n(x; a, b) = (b-a)^{-n} \binom{n}{i} (b-x)^{n-i} (x-a)^i.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Kontrollpunkte des Polynoms $p(x) = x$ zu $B_i^n(x; a, b)$ gegeben sind durch $b_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \dots, n$.

Hinweis: Vgl. Lemma 6 mit Beweis (Skript).

(b) Sei $p(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ und $a = 0$, $b = 3$. Die Kontrollpunkte $b_0, \dots, b_3$ für $n = 3$ von p lauten $(1, 4, -8, -8)$.

Geben Sie die Bernstein-Darstellung des Graphen

$$\Gamma_p \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \longmapsto \big(x, p(x)\big),$$

bezüglich des Intervalls $[0,3]$ und bezüglich der Intervalle $[0, 3/2]$, $[3/2, 3]$ an, indem Sie die rekursive Berechnung der Teilpolynome mittels der Formel

$$\beta_i^k(x; a, b) = \frac{b-x}{b-a} \beta_i^{k-1}(x; a, b) + \frac{x-a}{b-a} \beta_{i+1}^{k-1}(x; a, b)$$

verwenden.

Hinweis: Vgl. Satz 34 und Bemerkung 35 (ii) im Skript.

(c) Zeichnen Sie die Bézier-Polygone der drei Darstellungen aus (b).

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **09.07.2015 um 18:00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 50%** der gesamten Punkte in den Übungsblättern. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 10.07.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180 für die Teilnahme an den Übungen.