Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Sommersemester 2015
Dr. Daniel Weiß, Dipl.-Math. Johannes Ernesti

Numerische Mathematik für die Fachrichtungen Informatik und Ingenieurwesen

Übungsblatt 7

Abgabe: bis 17.07.2015 um 08:00 Uhr

Hinweis: Die letzte Übung am 17.7. findet im Gaede-Hörsaal statt.

Aufgabe 28 (Die Idee hinter Googles Page-Ranking) (10 Punkte)

Um die Trefferseiten einer Anfrage sinnvoll zu sortieren, muss eine Suchmaschine die Wichtigkeit jeder Seite schätzen. Die populäre Suchmaschine Google verwendet dazu einen Algorithmus, der auf den folgenden Ideen beruht.

Seien $S_1, \dots, S_K$ Internetseiten, die sich gegenseitig verlinken. Jeder Link wird als Kante eines gerichteten Graphen von verlinkender zu verlinkter Seite aufgefasst. Zu einer Seite S_k sei N_k die Anzahl ausgehender Links und

$$L_k = \{j \in \mathbb{N} \colon S_j \text{ enthält Link auf } S_k\}$$

die Menge der Seiten, die einen Link auf S_k enthalten.

Die Wichtigkeit x_k einer Seite S_k wird dann als gewichtete Summe festgelegt

$$x_k = \sum\nolimits_{j \in L_k} \frac{x_j}{N_j},$$

d.h. jede Seite S_j, die auf S_k verlinkt, vergrößert die Wichtigkeit von S_k. Dabei ist der Beitrag umso größer, je weniger ausgehende Links S_j enthält und je wichtiger die Seite S_j selbst bewertet ist.

Diese Beziehungen zwischen den x_k führen auf ein Eigenwertproblem $Ax = x$ mit $x = (x_1, \dots, x_k)$.

Für das Netzwerk in Abbildung 1 ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

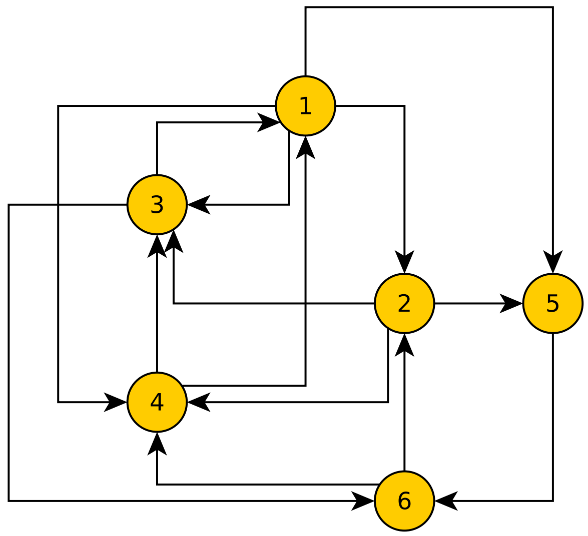

Abbildung 1: Ein Netzwerk mit 6 Seiten.

Statt A betrachtet man die Matrix $M = (1-m)A + \frac{m}{K}B$ für $m \in [0,1)$, wobei $B \in \mathbb{R}^{K \times K}$ die Matrix ist, die nur Einsen enthält.

Es lässt sich zeigen, das M einen eindimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 1 besitzt und dass sich dieser durch die Vektoriteration approximieren lässt:

$$x_0 \in \mathbb{R}^K, \qquad x_{i+1} := \frac{1}{\|Mx_i\|_1} M x_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Aufgabe: Verwenden Sie drei Schritte der Vektoriteration, um die Wichtigkeit der Seiten in Abbildung 1 zu schätzen. Dabei seien $m = 0.15$ und $x_0 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^K$.

Hinweis: Sie können die Matrix-Vektor-Produkte von einem Programm berechnen lassen.

Rückseite ⟶

Aufgabe 29 (Summierte Quadratur) (10 = 6 + 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie die folgende Fehlerabschätzung für die Trapezregel:

$$\Bigg|\underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}_{=I(f)} - \frac{h}{2}\big(f(x_0)+f(x_0+h)\big)\Bigg| \le \frac{h^3}{12} \max_{x\in[x_0,x_0+h]} |f''(x)|,$$

indem Sie $\frac{h}{2}\big(f(x_0)+f(x_0+h)\big) = I(\hat{f}))$ als Integral über eine f interpolierende Funktion $\hat{f}$ interpretieren und die Restglieddarstellung der Polynominterpolation investieren.

(b) Zeigen Sie, dass die summierte Trapezregel quadratisch in h gegen das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, wenn das Intervall $[a,b]$ äquidistant in Teilintervalle der Länge h zerlegt wird. Leiten Sie dazu eine Abschätzung für den Quadraturfehler in Abhängigkeit von h und f her.

Abgabe der Übungsblätter:

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind bis zum **17.07.2015 um 08:00 Uhr** in den Einwurfschlitz **Numerik für Informatiker und Ingenieurwesen** im Atrium des Kollegiengebäudes Mathematik (20.30) einzuwerfen. Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt **Name und Matrikelnummer** und heften Sie die Blätter zusammen. Die abgegebenen Aufgaben müssen einzeln und handschriftlich bearbeitet sein. Für den Übungsschein benötigen Sie **mindestens 130 Punkte**. Die zugehörige Übung zu diesem Übungsblatt findet am 17.07.2015 statt.

Service/Material:

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numinfing2015s/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Registrieren Sie sich bitte unter https://ma-vv.math.kit.edu/sso/180 für die Teilnahme an den Übungen.