Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

13. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 26. und 31. 1. 2012

Aufgabe 1:
Zeigen Sie, dass für $j, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(kx)\sin(jx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \text{ oder } j = k = 0 \\ \pi/2 & \text{für } j = k \neq 0 \end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kx)\cos(jx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ \pi/2 & \text{für } j = k \neq 0 \\ \pi & \text{für } j = k = 0 \end{cases}$

Aufgabe 2:
Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\;dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\;dx. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ ist, dann gilt $a_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$ ist, dann gilt $b_k = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Wenn f n-mal stetig differenzierbar und 2π-periodisch ist, dann gilt

$$|a_k| \leq \frac{C}{k^n} \quad , \quad |b_k| \leq \frac{C}{k^n}$$

für $k \in \mathbb{N}$ mit

$$C = 2 \max_{x \in [-\pi,\pi]} |f^{(n)}(x)|.$$

Aufgabe 3: (Exakte Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen)
Bestimmen Sie die exakte Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Neumann-Randbedingungen, d.h. des Anfangs-Randwertproblems

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) \qquad \text{für } t > 0, x \in (0,\pi), \tag{1a}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \text{für } x \in [0,\pi], \tag{1b}$$

$$\partial_n u(t,0) = \partial_n u(t,\pi) = 0 \qquad \text{für } t \geq 0. \tag{1c}$$

Hinweis: Gehen Sie analog zum Fall mit Dirichlet-Randbedingungen aus der Vorlesung vor.