Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

2. Übungsblatt

Besprechung in der Übungen am 27. 10. und 8. 11. 2011

Aufgabe 1:
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -\frac{y}{1+t} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad y(0) = 1.$$

(a) Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

(b) Das Anfangswertproblem soll numerisch mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens gelöst werden. Geben Sie die Näherungslösung $y_n^{(N)} \approx y(nh^{(N)}), n \geq 0$ zur Schrittweite $h^{(N)} = \frac{t_{end}}{N}$ $(t_{end} > 0)$ explizit an.
Bestimmen Sie damit den exakten Wert $y(t_{end})$ und daraus die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 2:

(a) Beweisen Sie das *Lemma von Gronwall*:
Sei $a \in C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ eine nichtnegative Funktion, $\alpha, C \geq 0$, und sei

$$a(t) \leq \alpha + C \int_{t_0}^{t} a(s)ds \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

Dann gilt die Abschätzung

$$a(t) \leq \alpha\, e^{C(t-t_0)} \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1].$$

(b) Begründen Sie, warum die Aussage aus (a) auch für allgemeine Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gilt, sofern $a \in C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ eine positive Funktion ist.

(c) Beweisen Sie Satz 3 der Vorlesung (Einfluss von Störungen der Anfangswerte):
Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^d, \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^d$ mit zugehöriger Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Für alle $(t, u), (t, v) \in \Omega$ gelte die einseitige Lipschitzbedingung

$$\langle f(t,u) - f(t,v), u - v \rangle \;\leq\; \ell \|u - v\|^2$$

mit $\ell \in \mathbb{R}$ ($\ell < 0$ ist möglich).
Seien y und z die Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t,y), \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= f(t,z), \\ z(t_0) &= z_0. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\|y(t) - z(t)\| \;\leq\; e^{\ell(t-t_0)}\, \|y(t_0) - z(t_0)\|.$$

Hinweis: Sie können verwenden, dass Anfangswertprobleme unter der einseitigen Lipschitzbedingung eindeutig lösbar sind.

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe)
Gegeben sei für $\lambda < 0$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lambda y(t) \quad , \quad t \in [0,1] \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(Testgleichung nach Dahlquist)}$$

Schreiben Sie ein Programm, welches die Lösung für verschiedene Schrittweiten $h = \frac{1}{N}$ und Parameterwerten λ durch das explizite Euler-Verfahren approximiert. Berechnen Sie die numerische Lösung zu den Werten

$$\begin{aligned} \lambda &= -1, -10, -100 \\ N &= 10, 50, 100, 1000 \end{aligned}$$

und plotten Sie die analytischen sowie die numerischen Lösungen im Intervall $[0,1]$.