

## Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

### 3. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 3. und 8. 11. 2011

#### Aufgabe 1: ( $\theta$ -Methode)

Betrachten Sie die  $\theta$ -Methode definiert durch die Verfahrensvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \theta h, (1 - \theta)y_n + \theta y_{n+1}), \quad \theta \in [0, 1]$$

zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0.$$

Bestimmen Sie die Parameterwerte von  $\theta$ , für die das Verfahren A-stabil ist.

#### Aufgabe 2: (Mittelpunktsregel)

Wir betrachten die  $\theta$ -Methode aus Aufgabe 1 für  $\theta = \frac{1}{2}$ . Dieses Verfahren wird auch Mittelpunktsregel genannt.

Zeigen Sie, dass der lokale Fehler die Abschätzung

$$\|y(t_{n+1}) - \Phi_h(y(t_n))\| \leq Ch^3$$

erfüllt. Sie dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die rechte Seite der Differentialgleichung nicht von der Zeit abhängt.

#### Aufgabe 3: (Programmieraufgabe)

Gegeben sei für  $\lambda < 0$  das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lambda y(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{Testgleichung nach Dahlquist})$$

- Schreiben Sie ein Programm, welches die Lösung für verschiedene Schrittweiten  $h = \frac{1}{N}$  und Parameterwerten  $\lambda$  durch die  $\theta$ -Methode approximiert.
- Plotten Sie für  $\theta = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$  die numerischen und analytischen Lösungen zu den Parameterwerten

$$\lambda = -10, -100$$

$$N = 10, 50, 100$$

- Erstellen Sie für unterschiedliche Werte von  $\theta$  Fehlerplots. In den Fehlerplots soll der globale Fehler des Verfahrens, das heißt

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(nh)|,$$

in Abhängigkeit von der Schrittweite  $h = \frac{1}{N}$  aufgetragen werden. Verwenden Sie die Werte

$$\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$$

$$\lambda = -100$$

$$N = 100, 10^3, 10^4, 10^5.$$