Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

5. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 17. und 22. 11. 2011

Aufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion für die folgenden numerischen Verfahren:
   (i) Heun,
   (ii) Runge.

(b) Zeichnen Sie das Stabilitätsgebiet für die Verfahren:
   (i) Explizites Euler-Verfahren,
   (ii) Implizites Euler-Verfahren,
   (iii) Mittelpunktsregel.

Aufgabe 2: (Erhaltung von Isometrien)
Sei $M \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mit $M^* = -M$ (M ist schiefhermitesch). Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = My \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad , \quad t \geq t_0. \tag{1}$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Abbildung

$$y_0 \mapsto y$$

eine Isometrie ist, also

$$\|y(t)\| = \|y_0\| \quad \forall t \geq t_0,$$

wobei $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ mit $\langle u, v\rangle = \overline{u}^T v$.

(b) Zeigen Sie, dass ein Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das Anfangswertproblem (1) invariant unter Ähnlichkeitstransformationen ist.
Bemerkung: Sei $W \in \mathbb{C}^{d\times d}$ eine reguläre Matrix, $(y_n)_n$ die numerische Approximation an die Lösung von (1) und $(u_n)_n$ die Approximation an die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = WMW^{-1}u \quad , \quad u(t_0) = Wy_0 \quad , \quad t \geq t_0.$$

Um die Invarianz unter Ähnlichkeitstransformationen zu zeigen, müssen Sie
$u_n = Wy_n$ nachweisen.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass für ein isometrieerhaltendes Runge-Kutta-Verfahren angewandt auf das Anfangswertproblem (1) gilt:

$$\|y_0\| = \|y_n\| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Die Matrix iM ist hermitesch. Was weiß man über hermitesche Matrizen?

Aufgabe 3:
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Das implizite Euler-Verfahren ist L-stabil, aber nicht isometrieerhaltend.

(b) Die implizite Mittelpunktsregel ist isometrieerhaltend, aber nicht L-stabil.

(c) Es gibt kein Runge-Kutta-Verfahren, das L-stabil und isometrieerhaltend ist.