

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

6. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 24. und 29. 11. 2011

Aufgabe 1:

Wählen Sie eine Quadraturformel mit 2 Stützstellen c_1 und c_2 und bestimmen Sie das Butcher-Schema von maximaler Konsistenzordnung

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

des zugehörigen Kollokationsverfahrens.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie:

- (a) Die Koeffizienten eines durch Kollokation definierten impliziten Runge-Kutta-Verfahrens erfüllen für $0 \leq c_1 < \dots < c_s \leq 1$

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j^{k-1} = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, s \quad (1)$$
$$\sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k}, \quad i, k = 1, \dots, s.$$

- (b) Insbesondere ist dieses Runge-Kutta-Verfahren invariant gegen Autonomisierung.
(c) Die Eigenschaft (1) bedeutet, dass die Quadraturformel

$$\sum_{j=1}^s b_j P(c_j) \approx \int_0^1 P(t) dt$$

exakt ist für Polynome P vom Grad $\leq s - 1$.

- (d) Die Matrix $A = (a_{ij})$ ist genau dann invertierbar, wenn das Produkt der Stützstellen die Beziehung $\prod_{j=1}^s c_j \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{u}(t) = u(t)(1 - u(t)) - \frac{au(t)v(t)}{u(t) + d},$$

$$\dot{v}(t) = bv(t) \left(1 - \frac{v(t)}{u(t)}\right),$$

$$t \in [0, 100] \quad , \quad u(0) = 1.2 \quad , \quad v(0) = 0.5,$$

mit den Parametern

$$a = 1 \quad , \quad b = 0.1 \quad , \quad d = 0.1.$$

Das Differentialgleichungssystem modelliert ein Räuber-Beute Szenario, in welchem die Variable u die Populationsgröße der Beute beschreibt und v die des Räubers.

(a) Implementieren Sie ein Programm, welches die Lösung für verschiedene Schrittweiten $h = \frac{100}{N}$ durch

(i) das explizite Euler-Verfahren

(ii) das implizite Euler-Verfahren

(iii) die Mittelpunktsregel

approximiert.

Hinweis: Zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems in Matlab eignet sich der Befehl `fsolve`. Nähere Informationen sind in Matlab mit den Befehlen

```
help fsolve
```

und

```
doc fsolve
```

abrufbar.

(b) Plotten Sie die numerischen Lösungen aus (a) zu den Schrittweiten

$$h = 2, 1, \frac{1}{5}.$$