

## Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

### 7. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 1. und 6. 12. 2011

#### Aufgabe 1: (Eingebettete Verfahren)

Gegeben sei das Verfahren von Kutta mit dem Butcher-Schema

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Berechnen Sie die Verfahrenskonstanten  $\hat{b}_i, i = 1, \dots, 4$  eines eingebetteten Verfahrens der Ordnung 3. Warum eignet sich dieses Verfahren nicht zur Schätzung des Fehlers?

#### Aufgabe 2: (Fehlberg-Trick)

Die Ergebnisse aus Aufgabe 1 zeigen: Um für das Verfahren von Kutta einen Fehlerschätzer der Ordnung 3 zu erhalten, ist das Hinzufügen einer weiteren Stufe erforderlich

0					
1/2	1/2				
1/2	0	1/2			
1	0	0	1		
$c_5$	$a_{51}$	$a_{52}$	$a_{53}$	$a_{54}$	
	1/6	1/3	1/3	1/6	0
	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$	$\hat{b}_4$	$\hat{b}_5$

(1)

Um den Gesamtaufwand geschickt zu kompensieren, hatte Erwin Fehlberg die Idee, die letzte Stufe  $Y_s$  eines  $s$ -stufigen Verfahrens als  $f$ -Auswertung dadurch *effektiv* einzusparen, indem sie identisch mit der ersten Stufe  $Y_1^*$  des nächsten Schrittes ist, also

$$Y_s = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{sj} f(t_n + c_j h, Y_j) \stackrel{!}{=} y_{n+1} + h \sum_{j=1}^s a_{1j} f(t_{n+1} + c_j h, Y_j^*) = Y_1^* \quad (2)$$

mit

$$Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_j) \quad , \quad Y_i^* = y_{n+1} + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_{n+1} + c_j h, Y_j^*)$$

für  $i = 1, \dots, s$  und  $y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, Y_i)$ .

- (a) Was muss aufgrund von (2) für die Verfahrenskoeffizienten  $c_s, a_{sj}, j = 1, \dots, s - 1$  eines expliziten und konsistenten Verfahrens gelten?
- (b) Bestimmen Sie eine mögliche Wahl an Verfahrenskoeffizienten

$$\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4, \hat{b}_5$$

aus (1), so dass das eingebettete Verfahren die maximale Ordnung 3 besitzt. Hinweis: Ein Runge-Kutta-Verfahren hat genau dann die Konsistenzordnung  $p = 4$ , falls die Bedingungsgleichungen für  $p = 1, 2, 3$  erfüllt sind und zusätzlich gilt:

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^3 = 1/4 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j = 1/8 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j^2 = 1/12 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^s a_{ij} \sum_{k=1}^s a_{jk} c_k = 1/24 \quad (6)$$

### Aufgabe 3:

Wir betrachten die Drei-Term-Rekursion

$$x_{k+1} = 10x_k - 9x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

mit den Startwerten  $x_1 = 1 + \varepsilon_1$  und  $x_0 = 1$ . Dabei stellen wir uns vor, dass  $\varepsilon_1$  ein kleiner Fehler (z. B. Messfehler, Rundungsfehler, Datenfehler usw.) ist, der den eigentlichen Startwert verfälscht.

- (a) Berechnen Sie  $x_k, k \in \mathbb{N}$ , unter der Annahme, dass  $\varepsilon_1 = 0$ .
- (b) Schreiben Sie ein Programm, das mit einer for-Schleife die Werte  $x_2, x_3, \dots, x_{10}$  berechnet und plottet. Wählen Sie für  $\varepsilon_1 = 0.0001$ . Welche Auswirkung hat der kleine Fehler  $\varepsilon_1$ ?
- (c) Wir setzen

$$\varepsilon_k = x_k - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Leiten Sie eine Formel der Form  $\varepsilon_k = (\dots) \cdot \varepsilon_1$  her.