Aufgabe 1:

a) $y_1(t) \equiv 0$, $\quad y_2(t) = \frac{1}{4} t^2 \quad$ (Ansatz: $y(t) = c\, t^2$)

b) $y_1(0) = 1$, $\dot{y}_1(t) = 0 = -\frac{\sqrt{1-1}}{1} \Rightarrow y_1$ löst das AWP

$y_2(0) = 1$, $\dot{y}_2(t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \dots = -\frac{\sqrt{1-y_2^2(t)}}{y_2(t)} \Rightarrow y_2$ löst das AWP

Aufgabe 2:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

a) $y(0) = e^{0\cdot A} y_0 + \int_0^0 e^{(0-s)A} g(s, y(s))\, ds = y_0$

Mit A3 und $b(t) = t$, $f(s,t) = e^{(t-s)A} g(s, y(s))$ gilt:

$$\dot{y}(t) = A e^{tA} y_0 + \underbrace{f(t,t)}_{g(t,y(t))} \cdot 1 + \int_0^t \underbrace{\partial_t f(s,t)}_{= A e^{(t-s)A} g(s, y(s))} ds$$

$$= A y(t) + g(t, y(t))$$

b) (i) $y(t) = 1 - e^{t}$ $\qquad$ (ii) $y(t) = e^{-t} + t - 1$

Aufgabe 3:

Setze $g(u,v) = \int_a^u f(s,v)\, ds$

Dann gilt: $y(t) = g(b(t), t)$

Hauptsatz: $\partial_u g(u,v) = f(u,v)$

$$\partial_v g(u,v) = \partial_v \int_a^u f(s,v)\, ds \overset{f \text{ stetig db.}}{=} \int_a^u \partial_v f(s,v)\, ds$$

Setze $h(t) := (b(t), t) \Rightarrow y(t) = (g \circ h)(t)$

Kettenregel: $y'(t) = g'(h(t)) \circ h'(t) = \left(\partial_u g(h(t)) \quad \partial_v g(h(t))\right) \begin{pmatrix} b'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \dots = f(b(t), t)\, b'(t) + \int_a^{b(t)} \partial_t f(s,t)\, ds$$

Aufgabe 4:

Autonomes AWP 1. Ordnung: $\quad \hat{y}_1(t) := y_1'(t) \quad \hat{y}_2(t) := y_2'(t)$

$$\hat{Y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y_1(t) \\ \hat{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \hat{y}_2(t) \end{pmatrix} \qquad \hat{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{y}_1(t) \\ t^2 - \hat{y}_1(t) - y_2^2(t) \\ \hat{y}_2(t) \\ t + \hat{y}_2(t) + y_1^3(t) \end{pmatrix}$$