Aufgabe 5:

a) Picard - Lindelöff

b) expl. Euler: $y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n)$ $\quad t_n = n \cdot h = n \cdot \frac{t_{end}}{N}$

zeige mit Hilfe der vollständigen Induktion:

$$y_{n+1} = \frac{1 - \frac{t_{end}}{N}}{1 + n\,\frac{t_{end}}{N}} \qquad n \geq 0$$

Wegen $y_N \xrightarrow{N \to \infty} \frac{1}{1 + t_{end}}$, vermuten wir: $y(t) = \frac{1}{1+t}$ löst das AWP.

($\to$ Probe!)

Aufgabe 6:

$u' = f(t,u)$; $v' = f(t,v)$, $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$

Def. $\varepsilon(t) := \|u(t) - v(t)\|^2$

$$\varepsilon'(t) \leq 2\,l\,\varepsilon(t) \qquad \text{(nachrechnen)}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon'(t)\, e^{-2lt} \leq 2\,l\,\varepsilon(t)^{-2lt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\varepsilon(t)\, e^{-2lt}\right) \leq 0$$

Damit: $\varepsilon(t)\, e^{-2lt} \leq \varepsilon(t_0)\, e^{-2lt_0}$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(t) \leq \varepsilon(t_0)\, e^{2l(t-t_0)} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \square$$

Aufgabe 7:

Für $\tau \in [0,t]$ gilt: $\alpha(\tau) \leq a + c\int_0^\tau \alpha(s)\,ds \Leftrightarrow \frac{c\,\alpha(\tau)}{a + c\int_0^\tau \alpha(s)\,ds} \leq c$

Integration liefert: $$\underbrace{\int_0^t \frac{c\,\alpha(\tau)}{a + c\int_0^\tau \alpha(s)\,ds}\,d\tau}_{= \ldots = \ln\left(\frac{a + c\int_0^t \alpha(s)\,ds}{a}\right)} \leq \underbrace{\int_0^t c\,d\tau}_{= tc}$$

Damit: $\alpha(t) \leq a + c\int_0^t \alpha(s)\,ds \leq a\,e^{tc}$ $\quad \square$

Aufgabe 8:

(i) D konvex $\Rightarrow$ für $u, v \in D$ gilt: $v + t(u-v) \in D$ $\quad t \in [0,1]$

$\tilde{f}(t) := f(v + t(u-v))$ (wohldefiniert!)

Es gilt: $f(u) - f(v) = \ldots = \int_0^1 \tilde{f}'(t)\,dt$ mit $\tilde{f}'(t) = f'(v + t(u-v))(u-v)$

Damit: $\langle f(u) - f(v), u-v \rangle = \ldots = \int_0^1 \frac{\langle f'(v+t(u-v))(u-v), u-v\rangle}{\|u-v\|^2}\,dt\ \|u-v\|^2$

$\leq \ldots \leq \sup_{z \in D} \mu(f'(z))\,\|u-v\|^2$ $\qquad$ (ii) analog