

Aufgabe 9:

▷ Dahlquist'sche Testgl. einsetzen

▷ Umformen liefert: $y_{n+1} = \frac{1 + \Theta h \lambda}{1 - (1 - \Theta) h \lambda} y_n$

▷ Wenn $\left| \frac{1 + \Theta z}{1 - (1 - \Theta) z} \right| \leq 1$ für $z = a + ib$ $a < 0$, ist das

Verfahren A-stabil.

▷ Zeige $\underbrace{|1 + \Theta a + i \Theta b|}_{=: u} \leq \underbrace{|1 - (1 - \Theta) a - i(1 - \Theta) b|}_{=: v}$

▷ Fall 1: $\Theta \leq \frac{1}{2}$

zeige $|\operatorname{Re}(u)| \leq |\operatorname{Re}(v)|$ und $|\operatorname{Im}(u)| \leq |\operatorname{Im}(v)|$

\Rightarrow A-stabil für $\Theta \leq \frac{1}{2}$

▷ Fall 2: $\Theta > \frac{1}{2}$

Für $\Theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$ setze $z = -\frac{1}{\varepsilon}$ mit $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

zeige, dass dann gilt: $|1 + \Theta z| > |1 - (1 - \Theta) z|$

\Rightarrow nicht A-stabil für $\Theta > \frac{1}{2}$

Aufgabe 10:

(i) $y_{n+1} = y_n + h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n))$

(ii) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) + \frac{h}{2} f(t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n))$

(iii) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} f(t_n, y_n) + \frac{h}{3} f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n))$

$+ \frac{h}{6} f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n))$

$+ \frac{h}{6} f(t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n))$

Aufgabe 11:

$$y_{n+1} = \frac{(1 + \frac{h}{2} \lambda)}{(1 - \frac{h}{2} \lambda)} y_n \quad (\text{mit Dahlquist'scher Testgl.})$$

Da $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ und $h > 0$ gilt: $|1 + \frac{h}{2} \lambda| \leq |1 - \frac{h}{2} \lambda|$

\Rightarrow A-stabil