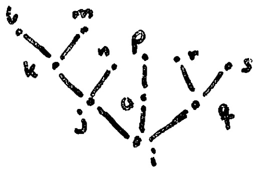
Aufgabe 12

a) (i) $f''(f, f''(f,f))$ (ii) $f''(f'f, f'f)$ (iii) $f'f'''(f,f,f)$

b) (i)  (ii)  (iii) 

c) $\gamma(\tau) = 990$



$$\Phi(\tau) = \sum_i b_i \sum_{\substack{j,o,q,\\ k,n,l,m,\\ p,r,s}} a_{ij}\, a_{io}\, a_{iq}\, a_{jk}\, a_{jn}\, a_{kl}\, a_{km}\, a_{op}\, a_{qr}\, a_{qs}$$

Aufgabe 13

a) Aus VL bekannt: $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i \quad i=1,\dots,s$ (*)

Ordnung 1: $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ Ordnung 2: $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{2}$

Ordnung 3:

betrachte zusätzlich die Bäume $\tau_1 =$  und $\tau_2 =$ 

Nach VL hat ein RKV genau dann Ordnung p, wenn gilt: $\sum_{i=1}^{s} b_i \phi_i(\tau) = \frac{1}{\gamma(\tau)}$ $\forall \tau \in T$ mit $\rho(\tau) \le p$

Nachrechnen unter Beachtung von (*) liefert

$$\phi_i(\tau_1) = \sum_j a_{ij} \underbrace{\sum_k a_{jk}}_{= c_j} \qquad \phi_i(\tau_2) = c_i^2$$

$\Rightarrow$ Ordnungsbed. für Ordnung 3: $\sum_{i=1}^{s} b_i \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j = \frac{1}{6}$ und $\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^2 = \frac{1}{3}$

b) $a_{ij} = 0 \quad i \le j$, da explizit $\Rightarrow c_1 = 0$

Bedingungen, die erfüllt sein müssen:

① $c_2 = a_{21}$ ② $c_3 = a_{31} + a_{32}$ ③ $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ ④ $b_2 c_2 + b_3 c_3 = \frac{1}{2}$

⑤ $b_2 c_2^2 + b_3 c_3^2 = \frac{1}{2}$ ⑥ $b_3 c_2 a_{32} = \frac{1}{6}$

$\rightarrow$ 6 Gln. mit 8 Unbekannten $\rightarrow$ Wähle Parameter

Bsp. 1: $a_{31} = 0 \quad b_2 = 0$

0	0	0	0
1/3	1/3	0	0
2/3	0	2/3	0
	1/4	0	3/4

Bsp. 2: $c_3 = 0 \quad b_3 = \frac{1}{2}$

0	0	0	0
2/3	2/3	0	0
0	-1/2	1/2	0
	-1/4	3/4	1/2

c) $c_2 = 1$ Implizites Verfahren

① $b_1 + b_2 = 1$ ② $a_{11} + a_{12} = c_1$ ③ $a_{21} + a_{22} = 1$ ④ $b_1 c_1 + b_2 = \frac{1}{2}$

⑤ $b_1 c_1 a_{11} + b_1 a_{12} + b_2 c_1 a_{21} + b_2 a_{22} = \frac{1}{6}$ ⑥ $b_1 c_1^2 + b_2 = \frac{1}{3}$

→ 6 Gleichungen mit 7 Unbekannten

Gleichungen ①, ④ und ⑥ liefern: $b_1 = 3/4$ $b_2 = 1/4$ $c_1 = 1/3$

<u>Beispiel 1:</u> $a_{21} = 0$

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

<u>Beispiel 2:</u> $a_{12} = 0$

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array}$$

<u>Aufgabe 14:</u>

a) (i) $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ (ii) $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$ (iii) $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$

b) Ordnungsbedingungen nachrechnen Für (i)-(iii) gilt $\sum_j a_{ij} = c_i$ $i = 1, \dots, s$

(i) $b_1 = 1$ ✓ $b_1 c_1 = 1 \neq \frac{1}{2}$ ⇒ Ordnung 1

(ii) $b_1 = 1$ ✓ $b_1 c_1 = \frac{1}{2}$ ✓ $b_1 c_1^2 = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3}$ ⇒ Ordnung 2

(iii) $b_1 + b_2 = 1$ ✓ $b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2}$ ✓ $b_1 c_1^2 + b_2 c_2^2 = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$ ⇒ Ordnung 2

<u>Aufgabe 15:</u>

Vergleiche die Stufen und Schritte des RKVs angewandt auf die DGL und das dazu autonome System.

RKV angewandt auf y: Stufen $Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_i)$

Schritt $y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_n + c_i h, Y_i)$

RKV angewandt auf autonomes System: Stufe: $U_i = \begin{bmatrix} \tau_i \\ \hat{Y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_n \\ y_n \end{bmatrix} + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \begin{bmatrix} 1 \\ f(\tau_i, \hat{Y}_i) \end{bmatrix}$

Schritt: $u_{n+1} = \begin{bmatrix} t_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_n \\ y_n \end{bmatrix} + h \sum_{i=1}^{s} b_i \begin{bmatrix} 1 \\ f(\tau_i, \hat{Y}_i) \end{bmatrix}$

Da $\tau_i = t_n + h c_i$ gilt $\hat{Y}_i = Y_i$ ⇒ Schritte identisch

Wegen $t_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i = t_{n+1}$ ⇒ Approximation identisch