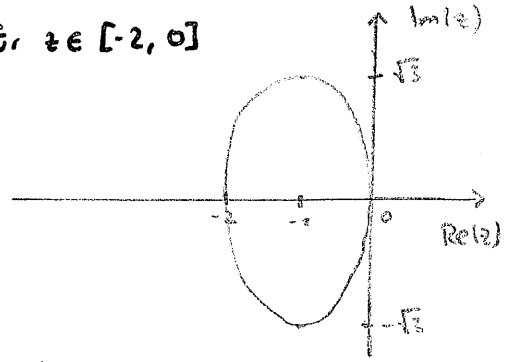
Aufgabe 16:

Für $f(t,x) = \lambda x$ folgt $x_{n+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right) x_n$

$\Rightarrow R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$

Stabilitätsgebiet: $\{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\} = \mathcal{S}$



Schritt 1: betrachte $z \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow |R(z)| \leq 1$ für $z \in [-2, 0]$

Schritt 2: bestimme $\partial\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| = 1\}$

Ansatz: $z = -1 + r e^{i\varphi}$

nachrechnen $\rightsquigarrow$ $r_{1,2}^2 = -\cos(2\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(2\varphi) + 3}$

Aufgabe 17:

a) $R(z) = \frac{1}{1-z}$ $\quad \lim_{|z|\to\infty} R(z) = 0 \Rightarrow$ L-stabil

aber: $|R(i)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 1 \Rightarrow$ nicht isometrie-erhaltend

b) $R(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$ $\quad \lim_{|z|\to\infty} R(z) = -1 \Rightarrow$ nicht L-stabil

$|R(it)| = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ isometrie-erhaltend

c) Widerspruch nach Def.

Es müsste sonst gelten: $0 = \lim_{t\to\infty} |R(it)| = 1$

Aufgabe 18:

a) $y'(t) = My$, $y(t) = e^{tM} y_0$

$\|y(t)\|^2 = \overline{y(t)}^T y(t) = \ldots = \overline{y_0}^T e^{-tM} e^{tM} y_0 = \ldots = \|y_0\|^2$

b) Betrachte das RKV für $\tilde{y}'(t) = SMS^{-1}\tilde{y}(t)$, $\tilde{y}(0) = Sy_0$

$\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i SMS^{-1}\tilde{Y}_i \qquad \tilde{Y}_i = \tilde{y}_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} SMS^{-1}\tilde{Y}_j$

Multipliziere alle Gl. mit S^{-1} und setze $U_i := S^{-1}\tilde{Y}_i$ $\quad u_n = S^{-1}\tilde{y}_n$

$\rightsquigarrow u_{n+1} = u_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i MU_i \qquad U_i = u_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} MU_j$

Dies sind die Gleichungen für das RKV für $u'(t) = Mu(t)$, $u(0) = y_0$

Es gilt also: $y_n = u_n = S^{-1}\tilde{y}_n$

c) M schiefhermitesch $\Rightarrow$ es ex. orth. Matrix U mit $M = UDU^*$

$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, λ_k EWe von M und

$\lambda_k \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$.

Betrachte $\tilde{y}'(t) = U^* M U \tilde{y}(t)$, $\tilde{y}(0) = U^* y_0$

$= D\tilde{y}(t) \quad \Rightarrow \tilde{y}_k'(t) = \lambda_k \tilde{y}_k(t) \quad k = 1, \dots, n$

Hierbei handelt es sich um ein isometrie-erhaltendes RKV, da D

Diagonalmatrix. ($\rightsquigarrow$ Zurückführung auf 1D-Problem)

Dann gilt nach Def. $\|\tilde{y}_n\| = \|\tilde{y}_0\|$

Mit b) folgt:

$\|y_n\| = \|U\tilde{y}_n\| = \|\tilde{y}_n\| = \|\tilde{y}_0\| = \|U^* y_0\| = \|y_0\|$

Aufgabe 19

a)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/4 & -1/4 \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

b) nachrechnen

c) allgem: $R(z) = 1 + z b^T (I - zA)^{-1} \mathbb{1}$

mit $(I - zA)^{-1} = \dfrac{1}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{5}{12}z & -\frac{1}{4}z \\ \frac{1}{4}z & 1 - \frac{1}{4}z \end{pmatrix}$

$$R(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z}{1 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{6}z^2}$$

d) Es gilt $\lim\limits_{|z| \to \infty} R(z) = 0$ noch z.z.: A-stabilität.

Es gilt: $\frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{3}z + 1 = \frac{1}{6}\left(z - (2 + i\sqrt{2})\right)\left(z - (2 - i\sqrt{2})\right)$

$\rightsquigarrow$ Polstellen von $R(z)$ liegen in der rechten Halbebene

$\rightsquigarrow$ $R(z)$ holomorph auf $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$

$\rightsquigarrow$ Max von $R(z)$ liegt auf $\partial\Omega$

$\rightsquigarrow$ Wegen $R(z) = 0$ für $|z| \to \infty$ liegt das Max auf der imag. Achse.

zeige $|R(it)|^2 \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow |R(z)| \leq 1 \quad \forall z$ mit $\mathrm{Re}(z) \leq 0$

$\Rightarrow$ Verfahren ist L-stabil