Aufgabe 20:

maximale Ordnung $\Rightarrow$ Gauß-RKV

$\rightsquigarrow c_1, c_2$ sind Nst. des (evtl. verschobenen) Legendre-Polynoms 2ten Grades

$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad c_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

Formeln aus der VL $\rightsquigarrow$

$b_1 = \frac{1}{2}, \ b_2 = \frac{1}{2}, \ a_{11} = \frac{1}{4}, \ a_{22} = \frac{1}{4}$

$a_{21} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad a_{12} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Aufgabe 21:

Es gilt: $\sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} L_j(x) = x^{k-1} \quad k = 1, \dots, s$

Da auf beiden Seiten ein Polynom vom Grad $s-1$ steht und die Polynome an den s Stellen c_i, $i = 1, \dots, s$ übereinstimmen. (Eindeutigkeit Interpolationspolynom)

a) $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} = \sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} \int_0^1 L_j(x)\,dx = \dots = \int_0^1 x^{k-1}\,dx = \frac{1}{k}$

$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} \int_0^{c_i} L_j(x)\,dx = \dots = \frac{c_i^k}{k} \quad k, i = 1, \dots, s$

b) RKV invariant gegenüber Autonomisierung $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ und $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i \Leftrightarrow$ a) mit $k = 1$

c) Für die Monome $p_k : x \mapsto x^k \quad k = 0, \dots, s-1$ gilt:

$\int_0^1 p_k(x)\,dx = \frac{1}{k+1} \overset{a)}{=} \sum_{j=1}^{s} b_j c_j^k = \sum_{j=1}^{s} b_j p_k(c_j) \quad \Rightarrow$ QF exakt für alle Polynome vom Grad $s-1$.

d) Idee: Schreibe $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k} \quad i, k = 1, \dots, s$ als Matrixprodukt:

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} = \frac{c_i^k}{k} \Leftrightarrow \underbrace{A}_{(a_{ij})} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_1^2 & \cdots & c_1^{s-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & c_s & c_s^2 & \cdots & c_s^{s-1} \end{pmatrix}}_{=: G} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & \frac{c_1^2}{2} & \cdots & \frac{c_1^s}{s} \\ \vdots & & & \\ c_s & \frac{c_s^2}{2} & \cdots & \frac{c_s^s}{s} \end{pmatrix}}_{=: \hat{G}}$$

Es gilt $\det \hat{G} = \det A \cdot \det G$ und $\det \hat{G} = \frac{1}{s!} \prod_{j=1}^{s} c_j \det G$

Da G eine Vandermonde-Matrix ist, gilt $\det G \neq 0$

Dann gilt: $\det A = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{s!} \prod_{j=1}^{s} c_j = 0$

Aufgabe 22:

Es gelte $\langle f(u) - f(v), u - v \rangle \leq 0 \quad \forall u, v$. $\quad u_{n+1} = u_n + h f(u_{n+1}) \quad v_{n+1} = v_n + h f(v_{n+1})$ num. Approx.

Es gilt: $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n + h(f(u_{n+1}) - f(v_{n+1}))$

$\Leftrightarrow \|u_{n+1} - v_{n+1}\|^2 = \langle u_n - v_n, u_{n+1} - v_{n+1} \rangle + h \underbrace{\langle f(u_{n+1}) - f(v_{n+1}), u_{n+1} - v_{n+1} \rangle}_{\leq 0} \leq \|u_n - v_n\| \cdot \|u_{n+1} - v_{n+1}\|$

$\Leftrightarrow \|u_{n+1} - v_{n+1}\| \leq \|u_n - v_n\|$

$\square$