Aufgabe 23

Bestimme $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4$ derart, dass das Verfahren Ordnung 3 hat.

Nachrechnen mit Hilfe der Ordnungsbed. liefert: $\hat{b}_1 = \frac{1}{6}, \hat{b}_2 = 1/3, \hat{b}_3 = 1/3, \hat{b}_4 = \frac{1}{6}$

Die Koeff. entsprechen genau denen des klass RKV der Ordnung 4.

$\Rightarrow$ Auch das eingebettete Verfahren besitzt Ordnung 4 $\Rightarrow$ Fehlerschätzer ist konst. 0.

Aufgabe 24

a) expl. Verfahren: $a_{ij} = 0 \quad i \leq j$ insbes. $a_{sj} = 0 \quad j = 1, \dots, s$

$$\Rightarrow Y_1^{(n+1)} = y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i \, f(t_n + c_i h, Y_i^{(n)}) \overset{!}{=} y_n + h \sum_{i=1}^{s} a_{si} \, f(t_n + c_i h, Y_i^{(n)})$$

$\Rightarrow a_{si} = b_i \quad i = 1, \dots, s$, insbesondere $b_s = 0$, da $a_{ss} = 0$

weiter gilt: $c_s = \sum_{i=1}^{s} a_{si} = \sum_{i=1}^{s} b_i = 1$

b) Ordnung 3: Mit Hilfe der Ordnungsbed. erhält man das LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \\ \hat{b}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ unterbestimmtes LGS
$\Rightarrow$ unendl. viele Lösungen.

- $(b_1, b_2, b_3, b_4, 0)^T$ ist Lsg., hat aber Ordnung 4
- Da die letzten beiden Spalten identisch sind, ist auch $(b_1, b_2, b_3, 0, b_4)^T$ Lsg.
- Überprüfe, ob dadurch eine Ordnungsbed. für Ordnung 4 verletzt ist

$\rightsquigarrow$ Verfahren hat Ordnung 3.

Aufgabe 25:

0			
1	1		
c_3	a_{31}	a_{32}	
b	$1/2$	$1/2$	0
$\hat{b}$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	$\hat{b}_3$

a) Fehlbergtrick: $c_3 = 1 \quad a_{31} = a_{32} = \frac{1}{2}$

es muss gelten: $\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 = 1$ (Ord. 1)

aber nicht: $\hat{b}_2 + \hat{b}_3 = \frac{1}{2}$ (Ord. 2)

$\Rightarrow \hat{b}_1 \neq 1/2$ wähle z.B. $\hat{b}_1 = \hat{b}_2 = \frac{1}{4} \quad \hat{b}_3 = \frac{1}{2}$

b)
$$\hat{b}_1 + \hat{b}_2 + \hat{b}_3 = 1$$
$$\left.\begin{aligned} \hat{b}_2 + \hat{b}_3 c_3 &= 1/2 \\ \hat{b}_2 + \hat{b}_3 c_3^2 &= 1/3 \end{aligned}\right\} \text{Fehlbergtrick fkt. nicht, da unlösbar für } c_3 = 1$$
$$a_{32} \hat{b}_3 = 1/6$$

$\rightarrow$ Koeff. von Hand aus den Ordnungsbed. berechnen. Insbesondere muss gelten:
$a_{31} + a_{32} = c_3$

z.B. $c_3 = 1/2$

0			
1	1		
$1/2$	$1/4$	$1/4$	
	$1/2$	$1/2$	
	$1/6$	$1/6$	$2/3$

Aufgabe 26:

Nach Vor. gilt für bel. glatte $f(t,y)$ für den lokalen Fehler

$$\| y(t_0+h) - y_1 \| = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Betrachte Spezialfall $t_0 = 0$, $d=1$, $f(t,y) = f(t)$ unabh. von y.

Dann ist $\dot{y}(t) = f(t) \Rightarrow \frac{d^k y}{dt^k} = \frac{d^{k-1} f}{dt^{k-1}}$ und damit

$$y(h) = \sum_{k=0}^{p} \frac{d^k}{dt^k}(0)\, \frac{h^k}{k!} + \mathcal{O}(h^{p+1}) = y_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{d^k y}{dt^k}(0)\, \frac{h^k}{k!} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i\, f(t_0 + c_i h, Y_i) = y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i\, f(c_i h)$$

$$\underset{\uparrow}{=} y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i \sum_{j=0}^{p-1} \frac{d^j f}{dt^j}(0)\, \frac{(c_i h)^j}{j!} + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

Taylorentw. von f

$$= y_0 + \sum_{i=1}^{s} b_i \sum_{k=1}^{p} \frac{d^k y}{dt^k}(0)\, \frac{c_i^{k-1}}{(k-1)!}\, h^k + \mathcal{O}(h^{p+1})$$

$$| y(h) - y_1 | = \mathcal{O}(h^{p+1}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} b_i \frac{c_i^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{k!} \quad \forall k = 1, \dots, p$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} b_i\, c_i^{k-1} = \frac{1}{k} \quad \forall k = 1, \dots, p$$

$\Rightarrow$ Quadraturformel hat Ordnung p.