Aufgabe 28:

a) MSV angewandt auf $\dot{y}=0$ $[y(t)=y_0]$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, y(t_{n+j}) = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, f(t_{n+j}, y_{n+j}) \Leftrightarrow y_0 \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 0$$

MSV angewandt auf $\dot{y} = q\, t^{q-1}$ $[y(t) = t^q + y_0]$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, (t_{n+j})^q + c \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j}_{=0} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, q\, (t_{n+j})^{q-1}$$

$$\overset{\text{O.B.d.A}}{\underset{t_n=0}{\Leftrightarrow}} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, (jh)^q = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, q\, (jh)^{q-1} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, j^q = q \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, j^{q-1}$$

b) Lemma 5.2 (VL):

$L(y,t,h) = O(h^{p+1})$

Es gilt: $L(\exp, 0, h) = \alpha(e^h) - h\beta(e^h)$ $\quad (*)$

Taylorentwicklung: $L(y,t,h) = y(t) \sum_{j=0}^{k} \alpha_j + \sum_{q \geq 1} \frac{h^q}{q!} y^{(q)}(t) \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, j^q - q \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, j^{q-1} \right)$

also: $L(\exp, 0, h) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j + \sum_{q \geq 1} \frac{h^q}{q!} \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, j^q - q \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, j^{q-1} \right)$ $\quad (**)$

Mit $(*)$, $(**)$ und Lemma 5.2 folgt die Beh.

Aufgabe 29:

Für das Verfahren gilt: $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = \frac{4}{3}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$

Nachrechnen liefert: Ordnung $p = 4$.

Aufgabe 30:

a) (i) • Nach Konstruktion integrieren Adams-Verfahren exakt, wenn bei der Interpolation kein Fehler entsteht.

• Das ist der Fall, wenn $t \mapsto f(t, y(t))$ ein Polynom vom Grad $d \leq k-1$ ist.

• Insbesondere werden dann Dgl. der Form $\dot{y}(t) = q\, t^{q-1}$ $\quad q = 1, \dots, k$ exakt interpoliert $\overset{A28}{\Rightarrow}$ explizite Adamsverfahren haben die Ordnung k.

(ii) Beim impliziten Adams-Verfahren wird durch $k+1$ Punkte interpoliert, wie in (i) folgt die Ordnung $k+1$.

b) 2-Schritt-Verfahren $\Rightarrow \alpha, \beta$ Polynome vom Grad 2.

- Taylorentwicklung um $\xi = 1$ von α und β berechnen
- Nach 28 (b) muss $\alpha(e^h) - h\beta(e^h) = O(h^3)$ gelten.
- Verwende $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + O(h^3)$ und sortiere in h-Potenzen:

$$\alpha(e^h) - h\beta(e^h) = \alpha(1) + h\,(\alpha'(1) - \beta(1)) + h^2\left(\frac{\alpha''(1)}{2} + \frac{\alpha'(1)}{2} - \beta'(1)\right) + O(h^3)$$

Daraus folgen die Bedingungen:

$$\alpha(1) = 0 \qquad \alpha'(1) = \beta(1) \qquad \tfrac{1}{2}(\alpha''(1) + \alpha'(1)) = \beta'(1)$$

- Bedingungen in die Taylorentw. von α und β einsetzen:
  - $\alpha(\xi) = (\xi - 1)\left(\underbrace{\frac{\alpha''(1)}{2}}_{=:a}(\xi - 1) + \underbrace{\alpha'(1)}_{=:\eta}\right)$

    $\rightsquigarrow a \neq 0$, da $\alpha_k \neq 0$ im MSV, wegen $\alpha(1) = 0$ gilt $\alpha'(1) = \beta(1) = \eta \neq 0$
  - $\beta(\xi) = \underbrace{\frac{\beta''(1)}{2}}_{=:b}(\xi - 1)^2 + \frac{1}{2}(\xi - 1)(2a + \eta) + \eta$
- Da Skalierung ein äquivalentes Verfahren liefert, setze O.B.d.A $\eta = 1$.
- Irreduzibel $\Rightarrow$ α und β teilerfremd $\Rightarrow$ α und β haben verschiedene Nst. (Nachrechnen!)

Aufgabe 31:

Das MSV hat die Form: $\alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_2 y_{n+2} + \alpha_3 y_{n+3}$
$= h(\beta_0 f_n + \beta_1 f_{n+1} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_3 f_{n+3})$

allgem. implizites BDF: $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+3} = h f_{n+3}$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+3} = (y_{n+3} - y_{n+2}) + \frac{1}{2}(y_{n+3} - 2y_{n+2} + y_{n+1})$$
$$+ \frac{1}{3}(y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n)$$
$$= \frac{11}{6} y_{n+3} - 3y_{n+2} + \frac{3}{2} y_{n+1} - \frac{1}{3} y_n = h f_{n+3}$$

$\Rightarrow \alpha_0 = -\frac{1}{3}$, $\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = -3$, $\alpha_3 = \frac{11}{6}$, $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$