Aufgabe 32

(i) $\alpha(\zeta) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \zeta^j = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k-j} \zeta^{k-j} = \zeta^k \sum_{j=0}^{k} -\alpha_j \left(\frac{1}{\zeta}\right)^j = -\zeta^k \alpha\left(\frac{1}{\zeta}\right)$

(ii) Da $\alpha_k \neq 0$ gilt: $\alpha_0 = -\alpha_k \neq 0$. Also ist $\alpha(0) \neq 0$ und $\zeta = 0$ keine Nst.

α ist Erzeugenden fkt. eines stabilen MSV $\Rightarrow$ alle Nst. liegen im abg. Einheitskreis ohne Null.

<u>Ann</u>: Es ex. Nst. ζ mit $|\zeta| < 1$

Dann gilt $-\zeta^k \alpha\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \alpha(\zeta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\zeta}$ Nst. von α mit $\left|\frac{1}{\zeta}\right| > 1$ $\lightning$ zu stabil

$\Rightarrow$ Alle Nst. liegen auf dem Rand des Einheitskreises.

Aufgabe 33

a) $\mathrm{Re}(z^{-1}) = \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{1}{|z|^2} \mathrm{Re}(z)$

b) (i) 0-stabil $\Leftrightarrow$ Für jede Nst ζ muss $|\zeta| < 1$ oder $|\zeta| = 1$ und einfache Nst. gelten.

- $\zeta = 1$ ist Nst., diese ist für $a = 0$ einfach
- Für $a \neq 0$ ist $\zeta_2 = \frac{a-1}{a}$ weitere Nst. mit $|\zeta_2| < 1$ für $a > \frac{1}{2}$, $|\zeta_2| > 1$ für $a < \frac{1}{2}$

  Für $a = \frac{1}{2}$ gilt $\zeta_2 = -1$ und ζ_2 einfache Nst.

$\Rightarrow$ Das Verfahren ist für $a \geq \frac{1}{2}$ 0-stabil

(ii) Nach a) können wir den Quotienten $\frac{\beta(\zeta)}{\alpha(\zeta)}$ untersuchen

„$\Leftarrow$" Betrachte die Terme seperat. Wähle dazu Polarkoordinaten $\zeta = r e^{i\varphi}$

- zeige $\frac{\zeta+1}{\zeta-1} = \dots = \frac{r^2-1}{|re^{i\varphi}-1|^2} =: f_1(r,\varphi) > 0$ für $r > 1$
- $\frac{\zeta-1}{a(\zeta-1)+1} = \dots = \frac{a|\zeta|^2 - a(\zeta+\bar{\zeta}) + \zeta + a - 1}{|a(\zeta-1)+1|^2} =: f_2(r,\varphi)$

$$\mathrm{Re}(f_2(r,\varphi)) = \frac{1}{|a(\zeta-1)+1|^2} \underbrace{(ar^2 + r(1-2a)\cos(\varphi) + a - 1)}_{=: g(r,\varphi)}$$

- Für ein festes φ gilt: $g(1,\varphi) \geq 0$, $a \geq \frac{1}{2}$

  zeige $\frac{\partial g}{\partial r} > 0$ für $r > 1$ $\Rightarrow g \neq 0$ außerhalb des Einheitskreises

- Es gilt $\mathrm{Re}\left(\frac{\beta(\zeta)}{\alpha(\zeta)}\right) = \frac{1}{2} \underbrace{f_1(r,\varphi)}_{>0} + \underbrace{\left(b - \frac{a}{2}\right)}_{\geq 0} \underbrace{f_2(r,\varphi)}_{\geq 0} > 0$

„⇒": Es gelte $\mathrm{Re}\left(\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}\right) > 0 \quad \forall |\xi| > 1$

1) Ann: $b < \frac{a}{2}$

Fall 1: $a \neq \frac{1}{2}$. Es gilt für $\varphi \in (0, 2\pi)$ $[\Leftrightarrow \cos(\varphi) \neq 1]$, $r > 1$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}\right) = \underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{f_1(r,\varphi)}_{>0}}_{\xrightarrow{r\to 1} 0} + \underbrace{\underbrace{\left(b - \frac{a}{2}\right)}_{<0} \underbrace{\mathrm{Re}\left(f_2(r,\varphi)\right)}_{>0}}_{\xrightarrow{r\to 1} c < 0} < 0 \quad (r \to 1)$$

↯

Fall 2: $a = \frac{1}{2}$. Es gilt für $\varphi = \pi$ $(\Rightarrow \xi = -r)$, $r > 1$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\beta(\xi)}{\alpha(\xi)}\right) = \ldots = \underbrace{\frac{1}{2} \underbrace{\frac{r-1}{r+1}}_{>0}}_{\xrightarrow{r\to 1} 0} + \underbrace{\underbrace{\left(b - \frac{a}{2}\right)}_{<0} \underbrace{\frac{2(r+1)}{r-1}}_{>0}}_{\xrightarrow{r\to 1} -\infty} < 0 \quad (r \to 1)$$

↯

2) $a \geq \frac{1}{2}$ folgt direkt aus (i), sonst nicht 0-stabil. □

Aufgabe 34

a) konsistent ⇔ mind. Ordnung 1

- Es muss gelten: $\left.\begin{matrix} 1 + b + a = 0 \\ 3 + b - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow b = -2,\ a = 1$

- zeige: Das MSV hat nicht Ordnung 2 ⇒ Beh.

b) $\alpha(\xi) = \xi^2 - 2\xi + 1 = (\xi - 1)(\xi^2 + \xi - 1)$

Nst.: $\xi_1 = 1$, $\xi_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Es gilt $|\xi_2| = \left|\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right| > 1$ ⇒ MSV nicht stabil

Aufgabe 35

Das MSV hat die Form: $\alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h(\beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$

O.B.d.A $\alpha_2 = 1$. 5 Unbekannte ⇝ 5 Bed.:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + 1 &= 0 \\ \alpha_1 + 2 &= \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 + 4 &= 2(\beta_1 + 2\beta_2) \\ \alpha_1 + 8 &= 3(\beta_1 + 4\beta_2) \\ \alpha_1 + 16 &= 4(\beta_1 + 8\beta_2) \end{aligned}\right\}$$

Lösung des Lgs: $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \frac{1}{3}$, $\beta_2 = \frac{4}{3}$, $\beta_2 = \frac{1}{3}$

Es gilt: Das MSV hat max Ordnung 4 (nachrechnen!)

Das Verfahren lautet: $y_{n+2} - y_n = h\left(\frac{1}{3} f_{n+2} + \frac{4}{3} f_{n+1} + \frac{1}{3} f_n\right)$

⇒ Dieses MSV ist symmetrisch.

Wegen $\alpha(\xi) = -1 + \xi^2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \xi_{1/2} = \pm 1$, $|\xi_{1/2}| = 1$ und einfache Nst. ist das Verfahren stabil.