Aufgabe 36

Nach Satz 5.10,5 gilt: $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)}$ mit $|\xi| \geq 1\} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)}$ mit $|\xi| > 1\}$

Seien $\xi_1^\beta, \ldots, \xi_k^\beta$ die Nst. von β. Dann ist $f(\xi) := \frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\xi_1^\beta, \ldots, \xi_k^\beta\}$

Deshalb: $f(\underbrace{\{|\xi|>1\}}_{\text{offen}}) \overset{\text{holomorph}}{=} \{\frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)} : |\xi|>1\} \subset \mathcal{S}^c$

$$f(\{|\xi| \geq 1\}) \overset{\text{stetig}}{=} \{\frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)} : |\xi| \geq 1\} \supset \mathcal{S}^c$$

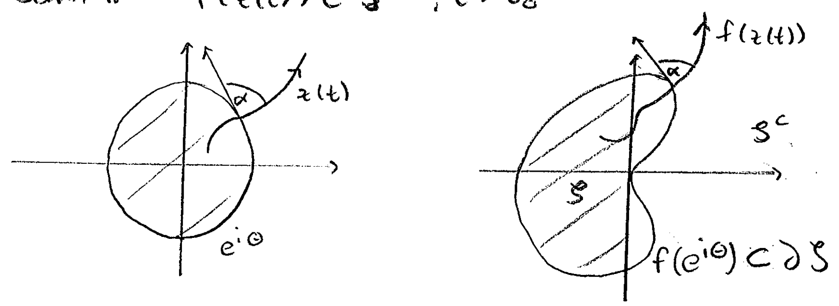
Also gilt: $\partial \mathcal{S} = \partial \mathcal{S}^c = \overline{\mathcal{S}}^c \setminus (\mathcal{S}^c)^\circ \subset \{\frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)} : |\xi| \geq 1\} \setminus \{\frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)} : |\xi|>1\}$

$$= \{\frac{\alpha(\xi)}{\beta(\xi)} : |\xi| = 1\}$$

Da f holomorph und somit winkelerhaltend ist, stimmt auch die Orientierung.

$t \mapsto z(t)$ verlässt den Einheitskreis. $|z(t)|>1$, $t>t_0$; $|z(t)| \leq 1$, $t \leq t_0$

Dann ist $f(z(t)) \in \mathcal{S}^c$, $t > t_0$



Aufgabe 37:

(i) Nach A38 gilt $\beta(\xi) = \xi^k \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* (1 - \frac{1}{\xi})^j$. Für $\xi = -1$ gilt: $(-1)^k \beta(-1) = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* 2^j$.

Es gilt $\gamma_0^* = 1$ $\quad \gamma_j^* = -\frac{1}{j!} \int_0^1 (1-\Theta)\Theta(\Theta+1) \cdot \ldots \cdot (\Theta+j-1)\, d\Theta < 0 \quad j \geq 1$

Daher: $\sum_{j=0}^{1} \gamma_j^* 2^j = \ldots = 0$, $\sum_{j=0}^{2} \gamma_j^* 2^j = \ldots < 0$

Die Summe ist für $k \geq 2$ negativ, da alle weiteren Summanden negativ sind.

(ii) Es gilt $|\beta(\xi)| \to \infty$ für $|\xi| \to \infty$, da β Polynom.

Insbesondere ex. ein $\xi^* < 0$ ($\xi^* \in \mathbb{R}$) mit $\operatorname{sgn}(\beta(\xi)) = \text{const}$ $\xi \in (-\infty, \xi^*)$

Da $\operatorname{sgn}((-1)^k) = \operatorname{sgn}(\xi^k) = \operatorname{sgn}(\frac{1}{\xi^k})$ gilt $\operatorname{sgn}((-1)^k \lim_{\xi \to -\infty} \beta(\xi)) = \operatorname{sgn}(\lim_{\xi \to -\infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi^k})$

$\xi < \xi^* < 0$

Es gilt: $\lim_{\xi \to -\infty} \frac{\beta(\xi)}{\xi^k} = \lim_{\xi \to -\infty} \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* (1 - \frac{1}{\xi})^j = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* = \underbrace{\gamma_0^*}_{>0} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \gamma_j^*}_{<0}$

$$\gamma_0^* + \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* > \frac{k+1}{k+1} \gamma_0^* + \sum_{j=0}^{k} \frac{k+1}{k+1-j} \gamma_j^* = (k+1) \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k+1-j} \gamma_j^* \overset{A39}{=} 0$$

(iii) Nach (i) und (ii) hat β eine Nst. im Interval $(-\infty, -1)$. Damit ist das Stabilitätsgebiet nach Satz 5.10,5 beschränkt.

Aufgabe 38

a) vollst. Induktion: (IA) ✓

$$\text{(IS)}\quad \nabla^{j+1} v_k = \nabla^j v_k - \nabla^j v_{k-1} \overset{IV}{=} \xi^k \left(1-\tfrac{1}{\xi}\right)^j - \xi^{k-1}\left(1-\tfrac{1}{\xi}\right)^j$$

$$= \xi^k \left(1-\tfrac{1}{\xi}\right)^{j+1}$$

b) impl. Adams-Verfahren: $y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \nabla^j f_n$

Einsetzen der Folge $y_k = v_k = \xi^k$ liefert: $\alpha(\xi) = \ldots = \xi^k\left(1-\frac{1}{\xi}\right)$

Einsetzen der Folge $f_k = y_k = v_k = \xi^k$ liefert: $\beta(\xi) = \ldots = \xi^k \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \left(1-\frac{1}{\xi}\right)^j$

Aufgabe 39:

Ansatz: $G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^* t^j$

Es gilt: $G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \int_0^1 \binom{-\Theta+1}{j} d\Theta = \int_0^1 \sum_{j=0}^{\infty} (-t)^j \binom{-\Theta+1}{j} d\Theta$

$$= \int_0^1 (1-t)^{-\Theta+1} d\Theta = (1-t)\int_0^1 (1-t)^{-\Theta} d\Theta$$

$$= -(1-t)\frac{t}{(1-t)\ln(1-t)} = -\frac{t}{\ln(1-t)}$$

Also $\quad -\dfrac{\ln(1-t)}{t} G(t) = 1$

$$\Leftrightarrow \left(1+\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{3}t^2+\tfrac{1}{4}t^3+\ldots\right)\left(\gamma_0^*+\gamma_1^* t+\gamma_2^* t^2+\gamma_3^* t^3+\ldots\right) = 1$$

Koeffizientenvergleich für t^m liefert

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m+1-j}\gamma_j^* = 0$$