Aufgabe 40

a) $h = \frac{b-a}{N}$ $\quad x_n = a + nh \quad (n = 0, \dots, N)$ für $N \in \mathbb{N}$

LGS: $-\frac{1}{h^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=: M \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N+1)}} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$

b) $u_N = u(b) = r_2$ ⇝ letzte Zeile des LGS: $-\frac{1}{h^2}(-2u_{N-1} + u_{N-2}) = f_{N-1} + \frac{1}{h^2} r_2$

⇝ Im LGS letzte Zeile verändern. Es gilt nun $M \in \mathbb{R}^{(N-1)\times N}$ und $u = (u_0, \dots, u_{N-1})^T$. Ändere auch die Werte in f.

c) (i) zusätzliche Bed: $\frac{1}{h}(u_1 - u_0) = r_1$

⇝ $-\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{=M \in \mathbb{R}^{N\times N}} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -hr_1 \\ h^2 f_1 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_2 \end{pmatrix}$ ⇝ symm., aber Approx nur Ordnung 1 am Rand

(ii) zusätzliche Bed.: $\frac{1}{2h}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) = r_1$ ⇝ nicht symm., aber Ordnung 2 am Rand

⇝ erste Zeile von M: $(-3, 4, -1, 0, -, 0)$

(iii) zusätzliche Bed: $u_1 - u_{-1} = 2hr_1$ $\quad (*)$

Problem: x_{-1} ex. nicht ⇝ Phantom-Punkt ⇝ x_0 ist innerer Punkt: $u_{-1} - 2u_0 + u_1 = -h^2 f_0$ $\quad (**)$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt: $u_1 - u_0 = \frac{h^2}{2} f_0 - hr_1$

⇝ LGS aufstellen ⇝ symm. und Ordnung 2 am Rand

Aufgabe 41:

a) Newton-Schema aufstellen ⇝ $p_i(x) = u_{i-1} + (x - x_{i-1})\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}$
$\quad + (x - x_{i-1})(x - x_i)\frac{1}{h_i + h_{i-1}}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$

mit $\frac{2}{h_i + h_{i-1}}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right) = \frac{2}{h_i h_{i-1}}$ folgt:

$p_i''(x) = \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \frac{u_{i+1}}{h_i} - \frac{2}{h_i h_{i-1}} u_i + \frac{2}{h_i + h_{i-1}} \frac{u_{i-1}}{h_{i-1}}$

b)

$\tilde{M} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{h_1 h_0} & \frac{2}{(h_1 + h_0) h_1} & & \\ \frac{2}{(h_2 + h_1) h_1} & -\frac{2}{h_2 h_1} & \frac{2}{(h_2 + h_1) h_2} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

$\tilde{M}$ nicht mehr symmetrisch.

c) Satz von Taylor:

$u_{i+1} - u_i = u_i' h_i + \frac{1}{2} u_i'' h_i^2 + \frac{1}{6} u_i''' h_i^3 + \frac{1}{4!} u^{(4)}(\xi_+) h_i^4$

$u_{i-1} - u_i = -u_i' h_{i-1} + \frac{1}{2} u_i'' h_{i-1}^2 - \frac{1}{6} u_i''' h_{i-1}^3 + \frac{1}{4!} u^{(4)}(\xi_-) h_{i-1}^4$

mit $\xi_+ \in (x_i, x_{i+1})$, $\xi_- \in (x_{i-1}, x_i)$

⇝ berechne $\frac{1}{2}(u_i'')(h_i + h_{i-1})$

⇝ $u_i'' - (\Delta_h u)(x_i) = \underbrace{\frac{1}{3} u'''(x_i)(h_{i-1} - h_i) - \frac{2}{4!}\Big(u^{(4)}(\xi_+)\underbrace{\frac{h_i^3}{h_i + h_{i-1}}}_{\le h_i^2} + u^{(4)}(\xi_-)\underbrace{\frac{h_{i-1}^3}{h_i + h_{i-1}}}_{\le h_{i-1}^2}\Big)}_{O(h_{i-1}^2 + h_i^2)}$

Aufgabe 42:

Nachrechnen. Benutze dazu:

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$; $\sin(3x) = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$; $\sin(nx) = \sin x \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} 2^{n-2k-1} \cos^{n-2k-1} x$