Aufgabe 43:

- wähle $m \in \mathbb{N}$, setze $h = \frac{1}{m}$ und $x_k = kh \quad k = 0, \dots, m$
- Ersetze die Raumableitung durch Differenzenquot. und def. $y_k(t) \approx u(t, x_k)$

$\Rightarrow \dot{y}_k(t) = \alpha(t, x_k) \dfrac{y_{k+1}(t) - 2y_k(t) + y_{k-1}(t)}{h^2} + \beta(t, x_k)\, y_k(t) + \gamma(t, x_k) \qquad k = 1, \dots, m-1$

Def. weiter: $y(t) = (y_1(t), \dots, y_{m-1}(t))^T$; $D(t) = \operatorname{diag}(\alpha(t, x_1), \dots, \alpha(t, x_{m-1}))$

$\bar{\beta}(t) = (\beta(t, x_1), \dots, \beta(t, x_{m-1}))^T$; $\bar{r}(t) = \frac{1}{h^2}(0, \dots, g(t))^T$; $\bar{\gamma}(t) = (\gamma(t, x_1), \dots, \gamma(t, x_{m-1}))^T$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}$ <u>ODE</u>: $\dot{y}(t) = \mathcal{A}(t)\, y(t) + \bar{r}(t) + \bar{\gamma}(t)$ mit $\mathcal{A}(t) = D(t)A - \bar{\beta}(t) I$

- Implizite Euler: Wähle $N \in \mathbb{N}$, setze $\tau = \frac{T}{N}$, $t_n = n\tau$, $n = 0, \dots, N$

Def. Approx. $y_k^n \approx y_k(t_n)$ und setze $y^n = (y_1^n, \dots, y_{m-1}^n)^T$

$\Rightarrow (I - \tau \mathcal{A}(t_{n+1}))\, y^{n+1} = y^n + \tau\, (\bar{r}(t_{n+1}) + \bar{\gamma}(t_{n+1}))$

Aufgabe 44:

- M ist eine symm. pos. def. Matrix (zeigen!)

$\hookrightarrow$ es ex. eine Cholesky zerlegung von M.

- Sei nun B eine invertierbare symm. tridiagonale Matrix der Form

$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & \\ \beta & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta \\ & & \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Definiere nun L und D wie in der Aufgabe mit $d_1 = \alpha$, $d_j = \alpha - \frac{\beta^2}{d_{j-1}}$ $(j = 2, \dots, m-1)$ und $l_j = \frac{\beta}{d_j}$. Dann gilt $\hat{B} = LDL^T \overset{!}{=} B$ (nachrechnen!)

$\Rightarrow LDL^T$ ist eine Cholesky zerlegung von B.

(Mit $\alpha = 1 + 2\tau$ und $\beta = -\tau$ erhält man die Zerlegung von $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -2 \end{pmatrix}$)

Aufgabe 45

a) $\sin(jx)\sin(kx) = \frac{1}{2}(\cos((k-j)x) - \cos((k+j)x))$

Es gilt: $u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \iff \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(x)\sin(jx)\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\pi} \sin(kx)\sin(jx)\,dx = b_j$

b) Es gilt $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\, e^{-k^2 t} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \quad \forall t \Rightarrow u(t,\cdot)$ stetig

c) Zeige mit den Quotientenkrit., dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^p e^{-k^2 t}$ konv.

$\partial_t u(t,x) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)\, k^2 e^{-k^2 t} = \partial_x^2 u(t,x)$ (nachrechnen)

Beide Reihen konv. nach dem Majorantenkrit mit Hinweis.