Aufgabe 46: siehe Skript

Aufgabe 47: Ansatz: $u(t,x) = v(x)\, w(t)$

- Einsetzen und umformen liefert: $\frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \hat{k}$

$\leadsto$ Dgl: $w''(t) = c^2 \hat{k}\, w(t)$, $v''(x) = \hat{k}\, v(x)$

- Randbed. $\Rightarrow v(0) = v(\pi) = 0$

Es gilt: $0 \leq \int_0^\pi (v'(x))^2 dx = \ldots = -\hat{k} \int_0^\pi (v(x))^2 dx \quad \Rightarrow \hat{k} < 0$, setze $\hat{k} = -k^2$ $k \in \mathbb{R}_+$

- Löse ODEs: $w(t) = \alpha \cos(ckt) + \beta \sin(ckt)$

$v(x) = \gamma \cos(kx) + \delta \sin(kx)$

Aus den RB folgt: $\gamma = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ (Begründung!)

$\Rightarrow$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ gilt: $u_k(t,x) = (a_k \cos(ckt) + b_k \sin(ckt)) \sin(kx)$

- Superpositionsprinzip: $u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(ckt) + b_k \sin(ckt)) \sin(kx)$
- Anfangsbed.: bestimme a_k und b_k.

$u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(kx) = f(x) \qquad \partial_t u(0,x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k ck \sin(kx) = g(x)$

Multipliziere jeweils beide Seiten mit $\frac{2}{\pi}\sin(jx)$ und integriere

$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin(kx)\, dx \qquad b_k = \frac{2}{\pi c k} \int_0^\pi g(x) \sin(kx) dx = b_k \quad (j \neq 0)$

$b_0 = g(0) = 0$

Aufgabe 48:

a) nachrechnen

b) Def.: $\hat{F}(y) = \frac{1}{2}\left(f(y) + \frac{1}{c}\int_0^y g(\xi)\, d\xi\right)$

$\hat{G}(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) + \frac{1}{c}\int_z^0 g(\xi)\, d\xi\right)$

Dann: $\hat{F}(x+ct) + \hat{G}(x-ct) = u(t,x)$ $\leadsto$ u erfüllt nach a) die Wellengl.

Anfangsbed.: nachrechnen