Ordnungsreduktion bei Runge-Kutta-Verfahren

Tobias Jahnke

Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung *Numerische Methoden für Differentialgleichungen*

Wintersemester 2015/16

Modellproblem von Prothero und Robinson

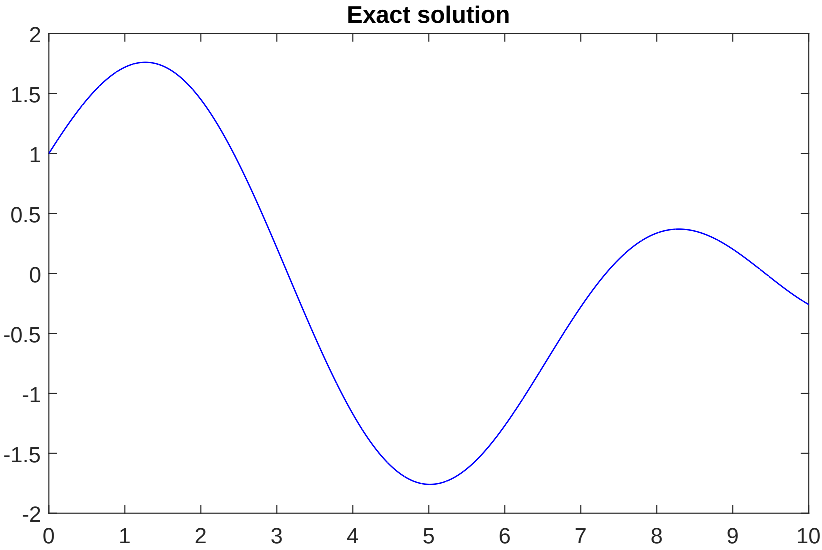
$$\dot{y}(t) = \lambda\big(y(t) - \varphi(t)\big) + \dot{\varphi}(t), \qquad y(t_0) = y_0 = \varphi(t_0)$$

Exakte Lösung: $y(t) = \varphi(t)$

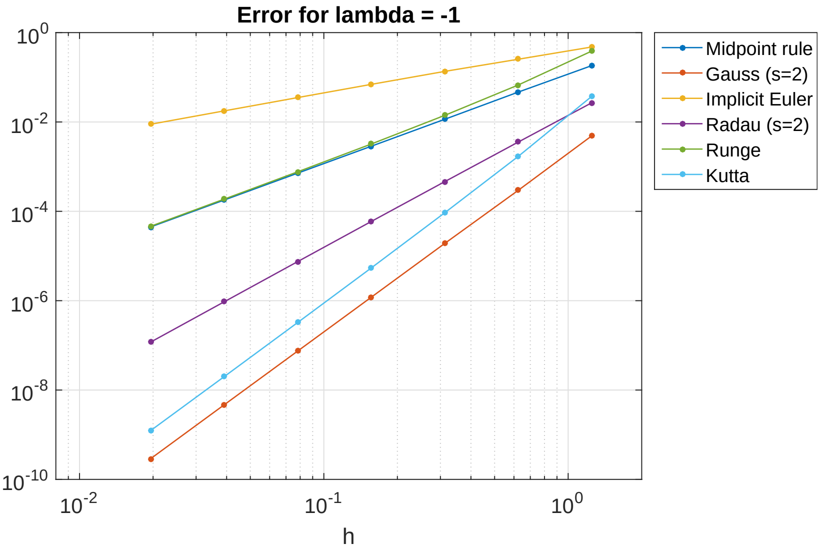
Wähle $\varphi(t) = \sin(t) + \cos(t/2), \qquad t \in [0, 10]$

- Beispiel 1: $\lambda = -1$
- Beispiel 2: $\lambda = -10000$

Die Lösung und ihre Ableitungen sind beschränkt.
Die Lösung hängt nicht von λ ab!
Lipschitz-Konstante: $L = |\lambda|$
Einseitige Lipschitz-Konstante: $\ell = \lambda$.

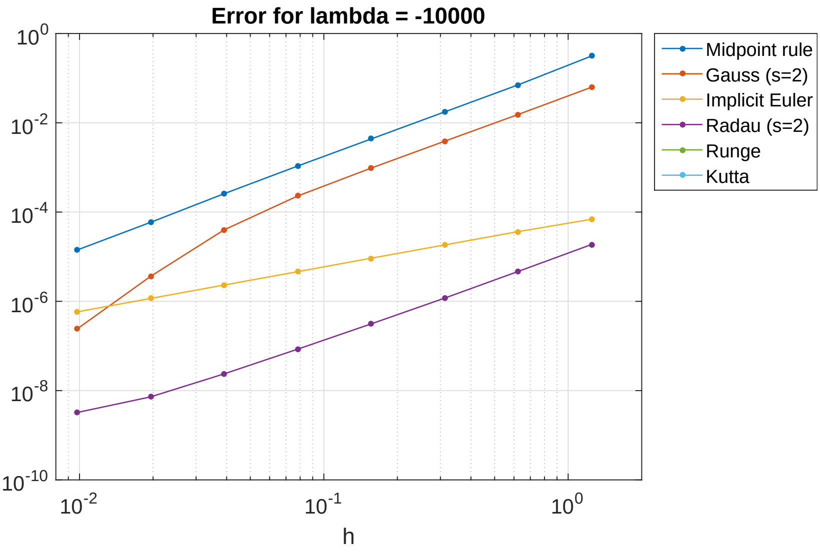

Exact solution
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Beispiel 1: $\lambda = -1$



Alle Verfahren konvergieren mit der klassischen Ordnung.

Beispiel 2: $\lambda = -10000$


Error for lambda = -10000
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
10^-10
10^-2
10^-1
10^0
h
Midpoint rule
Gauss (s=2)
Implicit Euler
Radau (s=2)
Runge
Kutta

- Die Mittelpunktsregel konvergiert immer noch mit Ordnung $p = 2 = 2s$. Nach Satz 4.34 würde man nur Ordnung $q = s = 1$ erwarten, nach Beispiel 4.31 jedoch $s + 1 = 2$.
- Das Gauß-RKV mit $s = 2$ konvergiert für große Schrittweiten mit Ordnung $q = s = 2$ (anstelle von $p = 2s = 4$) wie in Satz 4.34 bewiesen.
- Das Radau-RKV mit $s = 2$ konvergiert mit Ordnung $q = s = 2$ (anstelle von $p = 2s - 1 = 3$) wie in Satz 4.34 bewiesen.
- Bei den beiden Radau-RKV ($s = 1$ und $s = 2$) ist die Fehlerkonstante deutlich kleiner als im ersten Beispiel. Erklärung: nach Beispiel 4.32 erwarten wir einen globalen Fehler von $\mathcal{O}(|z|^{-1}h^{s+1}) = \mathcal{O}(|\lambda|^{-1}h^{s})$.
- Die expliziten Verfahren (von Runge bzw. Kutta) explodieren.

Ordnungsreduktion bei Runge-Kutta-Verfahren

Tobias Jahnke

Karlsruher Institut für Technologie

Vorlesung *Numerische Methoden für Differentialgleichungen*

Wintersemester 2015/16