Dies ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem

$$-A_h v_h = b_h$$

mit $v_h \in \mathbb{R}^L$, $(v_h)_{(m-1)\cdot(N-1)+n} = u_h(x_n, y_m)$, $L = (N-1)^2$

Beispiel ($N = 4$):

$$v_h = \big(u_h(x_1,y_1), u_h(x_2,y_1), u_h(x_3,y_1), u_h(x_1,y_2), u_h(x_2,y_2), u_h(x_3,y_2), u_h(x_1,y_3), u_h(x_2,y_3), u_h(x_3,y_3)\big)^T \in \mathbb{R}^9$$

$$A_h = I_{N-1} \otimes M + M \otimes I_{N-1} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} B & I & & \\ I & B & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & I \\ & & I & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{L\times L}$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$$

$$\beta_h(x_n, y_m) = f(x_n, y_m) + \frac{1}{h^2}\begin{cases} g(0, y_m) & \text{falls } n=1,\ m \notin \{1, N-1\} \\ g(1, y_m) & \text{falls } n = N-1,\ m \notin \{1, N-1\} \\ g(x_n, y_0) & \text{falls } m = 1,\ n \notin \{1, N-1\} \\ g(x_n, y_N) & \text{falls } m = N-1,\ n \notin \{1, N-1\} \\ g(0, y_1) + g(x_1, 0) & \text{falls } n = m = 1 \\ g(0, y_{N-1}) + g(x_1, 1) & \text{falls } n = 1,\ m = N-1 \\ \vdots & \\ 0 & \text{falls } n \notin \{1, N-1\},\ m \notin \{1, N-1\} \end{cases}$$

$b_h \in \mathbb{R}^L$, $(b_h)_{(m-1)\cdot(N-1)+n} = \beta_h(x_n, y_m)$

Man kann zeigen, dass $-A_h$ positiv definit ist $\Rightarrow$ eindeutige Lösung des Gleichungssystems. Lösung durch Cholesky-Zerlegung, CG-Verfahren oder Krylov-Verfahren.

7.3 Konvergenz

Wie gut ist die Approximation $u_h(x_n, y_m) \approx u(x_n, y_m)$?
Konvergenz für $N \to \infty$ bzw. $h \to 0$?

Approximationsfehler $\varepsilon_h := u_h - u|_{\overline{\Omega}}$

Satz 7.3 (diskretes Maximumprinzip)

Sei $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ die Lösung von (P_h). Wenn $f|_{\Omega_h} \leq 0$, dann gilt

$$\max_{\overline{\Omega}_h} u_h = \max_{\Gamma_h} g$$

Beweis:
Annahme: Es gibt ein $(x_n, y_m) \in \Omega_h$ derart, dass
$\max_{\overline{\Omega}_h} u_h = u_h(x_n, y_m) \geq u_h(x_i, y_j) \quad \forall\ i,j = 0, \dots, N$

Wegen $-\Delta_h u_h = f|_{\Omega_h}$ gilt dann

$$-\frac{1}{h^2}\left(u_h(x_{n+1}, y_m) + u_h(x_{n-1}, y_m) + u_h(x_n, y_{m+1}) + u_h(x_n, y_{m-1}) - 4u_h(x_n, y_m)\right)$$
$$= f(x_n, y_m) \leq 0 \quad \text{nach Voraussetzung}$$

Also ist
$$u_h(x_n, y_m) \leq \frac{1}{4}\left(u_h(x_{n+1}, y_m) + u_h(x_{n-1}, y_m) + u_h(x_n, y_{m+1}) + u_h(x_n, y_{m-1})\right)$$
$$\leq \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot u_h(x_n, y_m)$$

$\Rightarrow u_h(x_{n\pm 1}, y_m) = u_h(x_n, y_{m\pm 1}) = u_h(x_n, y_m)$,

d.h. das Maximum wird auch auf den Nachbarpunkten angenommen.

Iterativ folgt
$$u_h(x_n, y_m) = u_h(x_{n-1}, y_m) = \dots = u_h(x_0, y_m)$$
$$= g(x_0, y_m) \leq \max_{\Gamma} g \quad \blacksquare$$

Satz 7.4 (Vergleichsprinzip)

Für $v_h : \overline{\Omega_h} \to \mathbb{R}$ und $w_h : \overline{\Omega_h} \to \mathbb{R}$ gelte

$$\begin{cases} -\Delta_h v_h \leq -\Delta_h w_h & \text{in } \Omega_h \\ v_h \leq w_h & \text{auf } \Gamma_h \end{cases}$$

Dann gilt auch $v_h \leq w_h$ in Ω_h.

Beweis:

$(v_h - w_h)$ löst

$$-\Delta_h (v_h - w_h) \leq 0 \quad \text{in } \Omega_h$$
$$v_h - w_h \leq 0 \quad \text{in } \Gamma_h$$

Diskretes Maximumsprinzip: $\max\limits_{\overline{\Omega}_h} (v_h - w_h) \leq \max\limits_{\Gamma_h} (v_h - w_h) \leq 0$ $\blacksquare$

Lemma 7.5

Sei $v_h : \overline{\Omega_h} \to \mathbb{R}$ die Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta_h v_h = 1 & \text{in } \Omega_h \\ v_h = 0 & \text{auf } \Gamma_h \end{cases}$$

Dann gilt $0 \leq v_h \leq \frac{1}{2}$ in Ω_h

Beweis:

$\tilde{v}_h := -v_h$ löst

$$\begin{cases} -\Delta_h \tilde{v}_h = -1 & \text{in } \Omega_h \\ \tilde{v}_h = 0 & \text{auf } \Gamma_h \end{cases}$$

Diskretes Maximumsprinzip $\Rightarrow$ $\tilde{v}_h \leq 0$ in Ω_h $\Rightarrow$ $v_h \geq 0$ in Ω_h

Zeige nun $v_h \leq \frac{1}{2}$ in Ω_h.

Definiere $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $w(x,y) = \frac{1}{4}(2 - x^2 - y^2)$

Es gilt $0 \leq w(x,y) \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega} = [0,1] \times [0,1]$

$$-\Delta w = -\frac{1}{4}(-2-2) = 1 \quad \text{auf } \Omega$$

Sei nun $w_h := w|_{\overline{\Omega}_h}$. Dann gilt auch

$$-\Delta_h w_h = 1 \quad \text{auf } \Omega_h,$$

weil der Differenzenquotient für Polynome vom Grad ≤ 2 exakt ist.

Also gilt

$$\begin{cases} -\Delta_h v_h = 1 = -\Delta_h w_h & \text{auf } \Omega_h \\ v_h = 0 \leq w_h & \text{in } \Gamma_h \end{cases}$$

Vergleichsprinzip $\Rightarrow v_h \leq w_h \leq \frac{1}{2}$ in Ω_h.

■

Satz 7.6 (Fehlerabschätzung)

Sei: $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ die Lösung von (P).

Sei $u_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$ die Lösung von (P_h).

Sei $u \in C^4(\Omega, \mathbb{R})$ viermal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\max_{\Omega_h} |u_h - u|_{\overline{\Omega}_h}| \leq C \cdot h^2$$

mit einer von h bzw. N unabhängigen Konstanten $C > 0$.

Beweis:

Sei $\varepsilon_h := u_h - u|_{\overline{\Omega}_h}$ Approximationsfehler, $\varepsilon_h : \overline{\Omega}_h \to \mathbb{R}$.

Nach Voraussetzung gilt für die exakte Lösung

$$\Delta u(x_n, y_m) = \Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h}(x_n, y_m) - d_h(x_n, y_m)$$

mit $d_h : \Omega_h \to \mathbb{R}$ und

$$\max_{\Omega_h} |d_h| \leq C_d \cdot h^2 \qquad (C_d \geq 0)$$

(Beweis durch Taylor-Entwicklung). Also gilt

$$\begin{cases} -\Delta_h u|_{\overline{\Omega}_h} = f|_{\Omega_h} - d_h & \text{in } \Omega_h \\ u = g & \text{auf } \Gamma_h \end{cases}$$

Der Fehler ε_h ist also Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta_h \varepsilon_h = d_h & \text{in } \Omega_h \\ \varepsilon_h = 0 & \text{auf } \Gamma_h \end{cases}$$

Sei: $M_h := \max_{\Omega_h} |d_h| \leq C_d \cdot h^2$, und sei v_h Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta_h v_h = M_h & \text{in } \Omega_h \\ v_h = 0 & \text{auf } \Gamma_h \end{cases}$$

Vergleichsprinzip (Satz 7.4) $\Rightarrow$ $\varepsilon_h \leq v_h$ in Ω_h

Lemma 7.5 $\Rightarrow$ $0 \leq \frac{v_h}{M_h} \leq \frac{1}{2}$, d.h. $v_h \leq \frac{M_h}{2}$.

Da $-v_h$ die Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta_h(-v_h) &= -M_h && \text{in } \Omega_h \\ -v_h &= 0 && \text{auf } \Gamma_h \end{aligned}$$

ist, folgt analog $-\frac{1}{2} M_h \leq v_h \leq \varepsilon_h$.

Also: $\max_{\Omega_h} |\varepsilon_h| \leq \frac{1}{2} M_h \leq \frac{1}{2} C_d \cdot h^2$ ∎