

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Differentialgleichungen 1)

- (a) Geben Sie zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0$$

an.

- (b) Zeigen Sie, dass

$$y_1(t) \equiv 1 \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sqrt{1-t^2}$$

Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = -\frac{\sqrt{1-y^2(t)}}{y(t)}, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 1)$$

sind.

Aufgabe 2 (Variation der Konstanten Formel)

- (a) Seien eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ gegeben. Zeigen Sie, dass die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t, y(t)), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$$

die Lösung

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}g(s, y(s)) \, ds$$

besitzt. Diese Gleichung wird als *Variation-der-Konstanten-Formel* bezeichnet.

- (b) Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(i) $\dot{y}(t) = -y(t) + 1, \quad y(0) = 0,$

(ii) $\dot{y}(t) = -y(t) + t, \quad y(0) = 0$

so, dass in Ihrer Lösungsdarstellung keine Integrale mehr vorkommen.

Aufgabe 3 (Rechenregeln)

Seien zwei stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$y(t) := \int_a^{b(t)} f(s, t) \, ds, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass y differenzierbar ist und die Ableitung y' gegeben ist durch

$$y'(t) = f(b(t), t)b'(t) + \int_a^{b(t)} \partial_t f(s, t) \, ds.$$

Aufgabe 4 (Differentialgleichungen 2)

Formulieren Sie das Anfangswertproblem

$$y_1'' = t^2 - y_1' - y_2^2,$$

$$y_2'' = t + y_2' + y_1^3$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0$$

als äquivalentes, autonomes Anfangswertproblem erster Ordnung.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 26. Oktober 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.