Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Prof. Dr. Tobias Jahnke • Dipl.-Math. oec. Marcel Mikl

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

Wintersemester 2015/16

Aufgabe 5 (Explizites Euler-Verfahren)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -\frac{y}{1+t}, \qquad t \geq 0, \qquad y(0) = 1\,.$$

(a) Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

(b) Das Anfangswertproblem soll numerisch mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens gelöst werden. Geben Sie die Näherungslösung $y_n^{(N)} \approx y(nh^{(N)}), n \geq 0$ zur Schrittweite $h^{(N)} = t_{\text{end}}/N$ ($t_{\text{end}} > 0$) explizit an. Bestimmen Sie damit den exakten Wert $y(t_{\text{end}})$ und daraus die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 6 (Einseitige Lipschitz-Bedingung)
Die Funktion $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ erfülle für alle $t \in [t_0, T]$ die *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$\langle f(t,u) - f(t,v), u - v\rangle \leq l\|u - v\|^2, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d\,,$$

mit der Lipschitzkonstanten $l \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, für Lösungen $y(t)$ und $z(t)$ der Anfangswertprobleme

$$y' = f(t,y)\,, \quad y(t_0) = y_0\,,$$

und

$$z' = f(t,z)\,, \quad z(t_0) = z_0$$

gilt die Abschätzung

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{l(t-t_0)}\|y(t_0) - z(t_0)\|, \quad \text{für } t \geq t_0.$$

Aufgabe 7 (Gronwall's Lemma)
Sei $\alpha \in C([0,T], \mathbb{R}_+)$ eine nichtnegative Funktion. Zeigen Sie, wenn zwei Konstanten $a \geq 0$ und $C \geq 0$ existieren, so dass die Ungleichung

$$\alpha(t) \leq a + C \int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in [0,T]$ erfüllt ist, dann gilt die Abschätzung

$$\alpha(t) \leq a\, e^{Ct}\,.$$

Aufgabe 8 (Lipschitz-Konstanten)
Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ eine offene und konvexe Menge und $f : D \to \mathbb{R}^d$ eine stetig differenzierbare Funktion.

Zeigen Sie, dass für $u, v \in D$ die Abschätzungen

(i) $\langle f(u) - f(v), u - v\rangle \leq l\|u - v\|^2$ mit $l = \sup_{z\in D} \vartheta(f'(z))$

(ii) $\|f(u) - f(v)\| \leq L\|u - v\|$ mit $L = \sup_{z\in D} \|f'(z)\|$

erfüllt sind. Dabei ist $\vartheta(\cdot)$ und $\|\cdot\|$ für $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ durch

$$\vartheta(A) = \sup_{z\neq 0} \frac{\langle Az, z\rangle}{\|z\|^2} \quad \text{und} \quad \|A\| = \sup_{z\neq 0} \frac{\|Az\|}{\|z\|}$$

gegeben.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 2. November 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.