

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2015/16

Übungsblatt 3

Aufgabe 9 (A-Stabilität)

Zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0.$$

soll die θ -Methode verwendet werden. Diese ist durch die Verfahrensvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + hf(\theta y_n + (1 - \theta)y_{n+1}), \quad \theta \in [0, 1]$$

gegeben.

Bestimmen Sie die Parameterwerte von θ , für die das Verfahren A-stabil ist.

Aufgabe 10 (Runge-Kutta-Verfahren)

Zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0.$$

haben Sie in der Vorlesung *Runge-Kutta-Verfahren* kennen gelernt. Ein s -stufiges RKV ist allgemein durch die Verfahrensvorschrift

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i f(t_n + c_i h, Y_i), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

$$Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_j), \quad i = 1, \dots, s$$

mit Koeffizienten b_i, c_j, a_{ij} gegeben.

Diese Verfahrensvorschrift kann durch das *Butcher-Tableau*

c_1	a_{11}	\cdots	a_{1s}
\vdots	\vdots		\vdots
c_s	a_{s1}	\cdots	a_{ss}
	b_1	\cdots	b_s

kompakt ausgedrückt werden.

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu lernen ein RKV konkret aus einem *Butcher-Tableau* zu konstruieren. Schreiben Sie dazu die Verfahrensvorschrift der folgenden RKVn explizit auf. Das heißt, drücken Sie die neue iterierte y_{n+1} nur mithilfe von f, h und der alten iterierten y_n aus.

(i) Das Verfahren von Runge:

0	
1/2	1/2
	0 1

(ii) Das Verfahren von Heun:

0	
1	1
	1/2 1/2

(iii) Das klassische Runge-Kutta-Verfahren:

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Aufgabe 11 (A-Stabilität)

Zeigen Sie, dass die Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}) \right)$$

zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq 0, \quad y(0) = y_0.$$

A-stabil ist.

Die Aufgaben werden am **Montag, den 9. November 2015, 11:30 Uhr** in der zentralen Übung besprochen.

Homepage:

Unter <http://www.math.kit.edu/ianm3/edu/nummethdgl2015w/de> erreichen Sie die Homepage zur Vorlesung. Dort finden Sie neben den aktuellen Übungsblättern auch alle Informationen zum Vorlesungsbetrieb.